

UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA ENSINAR O FENÔMENO DE *ALIASING* PARA ALUNOS DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

A DIDACTIC APPROACH TO TEACH ALIASING PHENOMENON TO COMPUTER ENGINEERING UNDERGRADUATE STUDENTS

José Solenir Lima Figuerêdo¹, Caique dos Santos Trindade²,
Weverson dos Santos Gomes³, Edgar Silva Júnior⁴

DOI: 10.37702/REE2236-0158.v41p38-50.2022

RESUMO

Este estudo apresenta uma análise do efeito estroboscópico: uma abordagem didática para ensinar o fenômeno de *aliasing* causado pela subamostragem para alunos de graduação em Engenharia de Computação. O artigo em si é um resultado concreto da metodologia e procedimentos utilizados para ensinar o assunto supramencionado. Uma análise matemática do efeito estroboscópico é realizada e, então, as frequências existentes nesse fenômeno por meio do giro de um ventilador iluminado por uma lâmpada estroboscópica são relacionadas. Além disso, dada a importância da visão humana neste contexto, os diferentes efeitos percebidos à luz do processo de amostragem são explicados. Para representar o movimento da fita vermelha colada em uma das hélices de um ventilador, um simulador foi desenvolvido, cuja visualização do fenômeno é possível, considerando as variáveis levadas em conta na etapa de modelagem matemática. Um conjunto de testes foi feito em cada intervalo designado, a fim de correlacionar as faixas de frequência obtidas analiticamente com o movimento percebido pelo olho humano, associando ambos e validando a modelagem. Com os resultados deste estudo é possível compreender a influência da frequência no processo de amostragem, bem como suas principais implicações, tais como o fenômeno *aliasing*: o resultado do processo de subamostragem.

Palavras-chave: efeito estroboscópico; aliasing; amostragem; Nyquist.

ABSTRACT

This study presents an analysis of the Stroboscopic effect: a didactic approach to teach aliasing phenomenon caused by undersampling to computer engineering undergraduate students. The article itself is a concrete result of the methodology and procedures used to teach the abovementioned subject. A mathematical analysis of the stroboscopic effect is carried out and it then relates the existing frequencies in this phenomenon through the spin of a fan lighted by a stroboscopic lamp. Moreover, given the importance of human vision within this context, we explain the different effects perceived under the light of the sampling process. To represent the fan movement, a simulator was developed, whose visualization of the phenomenon is possible, considering the variables accounted in the mathematical modeling stage. A set of tests was made in each designated interval in order to correlate the frequency ranges analytically obtained, with the movement perceived by human eyes, matching both. With the results of this study it is possible to understand the influence of the frequency

¹ Graduando em Engenharia de Computação, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS); jsfigueredo@comp.uefs

² Graduando em Engenharia de Computação, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS); usercah@gmail.com

³ Bacharel em Engenharia de Computação, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS); weversondsg@gmail.com

⁴ Professor Dr. em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS); edgarsjunior@comp.uefs.br

in the sampling process, as well as its main implications, such as aliasing: the result of the undersampling process.

Keywords: stroboscopic effect; aliasing; sampling; nyquist.

INTRODUÇÃO

Em 1832, o belga Joseph Plateau inventou um dispositivo composto por dois discos, que, ao girar numa frequência sincronizada, produzia um efeito animado. No mesmo ano, o austríaco Simon von Stampfer, com base nos experimentos de Plateau, desenvolveu o Disco de Stampfer, ilustrado na Figura 1. Era um dispositivo semelhante ao de Plateau, mas os eixos dos dois discos eram conectados por meio de uma engrenagem e, quando giravam, tinha-se a impressão de que as imagens estavam em movimento contínuo. Este dispositivo deu início, ao que seria chamado, futuramente, de efeito estroboscópico.

O efeito estroboscópico é um fenômeno de ilusão ótica, consequência da interação entre uma luz estroboscópica e algum objeto em movimento, em geral periódico, o que resulta na impressão de um movimento aparente e ilusório (PASTANA; GOMES, 2007; GUEDES, 2002). A luz estroboscópica é uma fonte luminosa pulsante. Já o movimento periódico é um movimento repetitivo, que pode ser observado em ciclos de ondas harmônicas. Essa ilusão é fruto das relações entre as frequências envolvidas no processo e da limitação intrínseca da visão humana. Exemplos em que esse efeito pode ser observado são: o alinhamento e balanceamento de máquinas e peças automotivas; os efeitos do giro das hélices de um helicóptero filmado por uma câmera de vídeo; e os efeitos do giro de rodas de automóveis. Esse efeito é comumente utilizado na experimentação laboratorial em indústrias. Ele pode ser utilizado no estudo das máquinas elétricas, para definir rigorosamente o valor da velocidade de rotação ou de grandezas com ela relacionadas, como o deslizamento; para observar o ângulo de carga

de uma máquina assíncrona, bem como na análise de qualidade de energia elétrica (CANESIN, 2001; GUEDES, 2002). Além disso, tem-se estudos que buscam analisar a visibilidade do efeito estroboscópico com relação à descarga de alta densidade (HID) (EASTMAN; CAMPBELL, 1952; FRIER; HENDERSON, 1973; REA; OUELLETTE, 1988).

Matematicamente esse efeito pode ser analisado como o resultado da subamostragem de um sinal contínuo no tempo. Essa análise pode ser realizada através do resultado do Teorema da Amostragem (JERRI, 1977). Esse teorema tem uma importância significativa, especialmente por ser uma ponte entre sinais contínuos e sinais discretos. Devido aos avanços tecnológicos na área digital, os sistemas de sinais discretos estão mais flexíveis, a preços mais acessíveis, portáteis e programáveis (OPPENHEIM et al., 1997). Além disso, o material existente na literatura atual sobre o tema é muito superficial, e nenhum deles analisa em detalhes a relação entre as frequências de amostragem e do sinal amostrado e seus efeitos (CASTANIÉ, 2013; NISHIYAMA, 2012; OPPENHEIM et al., 1997; VAN VEEN, 1966). A referência que mais se aproxima de uma análise do efeito estroboscópico é o estudo de Oppenheim et al. (1997). Entretanto, ela apenas inicia a análise, sem se aprofundar no assunto, ou estabelecer equações detalhadas. Diante disso, este estudo visa a descrever detalhadamente o efeito estroboscópico, de forma textual, matemática e gráfica, considerando as suas diversas variações, à luz da relação entre as frequências presentes nesse fenômeno e a ocorrência do *aliasing*.

Este trabalho é fruto de uma situação-problema apresentada na disciplina TEC 513 -

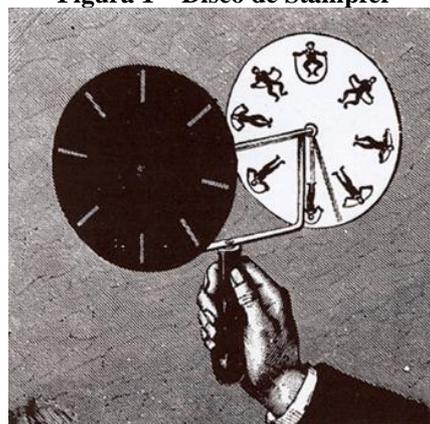
MI de Processamento Digital de Sinais, módulo integrador que utiliza a metodologia de aprendizado PBL (*Problem-Based Learning*) no curso de Engenharia de Computação da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Essa situação-problema foi a forma mais didática encontrada para abordar o fenômeno chamado de *aliasing*, fruto de uma subamostragem realizada em sinais analógicos, como parte do processo de sua conversão para sinais digitais. Esse fenômeno ocorre, na maioria das vezes, sem ser percebido visualmente. A situação-problema proposta foi elaborada para que os alunos tivessem a percepção visual do fenômeno. Como o mundo atualmente caminha todo para o digital, sinais analógicos necessitam constantemente ser convertidos para o domínio digital para serem processados e analisados por *hardwares* ou computadores.

O núcleo de Processamento Digital de Sinais, situado no 7º período do curso, é composto por duas disciplinas teóricas de 30 horas cada: TEC 430 - Processamento Digital de Sinais e TEC 501 - Eletrônica para Processamento Digital de Sinais; e pelo módulo integrador (MI): TEC513 - MI de Processamento Digital de Sinais, no qual os problemas são apresentados e a metodologia PBL é aplicada. O PBL pode ser definido como um processo ou metodologia de ensino que tem foco em atividades centradas nos estudantes e usa problemas concretos para motivá-los (WOODS, 1997). Ou seja, trata-se de uma abordagem de ensino e aprendizagem caracterizada pelo uso de problemas da vida real, como forma de estimular o desenvolvimento crítico e as habilidades de solução de problemas, além de promover a aquisição de conceitos fundamentais da área de conhecimento em questão (ANGELO et al., 2014; ANGELO; BERTONI, 2012). A decisão pela adoção do PBL no currículo do curso de Engenharia de Computação da UEFS ocorreu durante a elaboração do projeto de curso. Escolheu-se o PBL por ele ser considerado um dos possíveis métodos a serem utilizados no curso que reforça a interação entre teoria e prática por meio de um ciclo de situação-

fundamentação-realização (BITTENCOURT et al., 2002).

O PBL possibilita que os discentes estudem individualmente e em grupos, a partir de um problema apresentado pelo professor/tutor. As dúvidas e dificuldades são tiradas por meio de discussões feitas durante as sessões tutoriais, com no máximo doze alunos. As sessões tutoriais, que acontecem periodicamente, configuram-se como um espaço de aprendizagem colaborativa. É neste contexto, sob as discussões, observações e resolução da situação problema, que este trabalho se desenvolve. Os resultados ao longo deste artigo mostram não só o potencial da metodologia como forma de aprendizado efetivo dos alunos, mas também como forma de produção de conhecimento.

Figura 1 – Disco de Stampfer



Fonte: (LOPES, 2013).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Transformada de Fourier

A série de Fourier representa funções periódicas por meio da soma de infinitas senoides (ou exponenciais complexas). Nos casos em que a função é não periódica, tem-se a transformada de Fourier (BRACEWELL; BRACEWELL, 1986). Contudo, é importante salientar que a transformada não se restringe apenas a sinais aperiódicos, podendo ser aplicada, também, em sinais cujo período está bem definido. Quando se trata da transformada de Fourier, encontra-se na literatura duas denominações, chamadas de pares da transformada, sendo uma a transformada direta

ou equação de análise (Eq.(3)) e a outra transformada inversa ou equação de síntese (Eq.(4)). A primeira indica um mapeamento da função no domínio contínuo do tempo $x(t)$ para o domínio contínuo da frequência $X(j\omega)$. Em contrapartida, a segunda indica a transformação do domínio contínuo da frequência para o domínio contínuo do tempo. O domínio da frequência também é conhecido por espectro de frequência de um sinal no tempo e, vale salientar, que ele é composto por magnitude (módulo) e fase, sendo geralmente representados em gráficos diferentes.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

Função Impulso Unitário

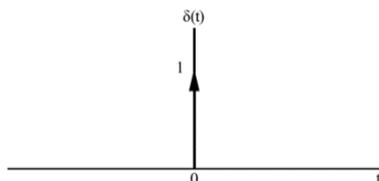
A função impulso unitário $\delta(t)$, também conhecida por delta de Dirac, é uma das mais importantes funções no estudo de sinais e sistemas. Essa função foi inicialmente definida por Paul Dirac pela Eq. (5) (LATHI, 2006).

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (5)$$

A representação gráfica da função de um impulso unitário pode ser vista na Figura 2, em que a seta indica a região na qual o impulso está localizado, por definição em $t = 0$, e a sua amplitude corresponde ao tamanho da área deste impulso que, pela Eq. (5), é igual a 1.

Figura 2 – Impulso Unitário de Tempo Contínuo



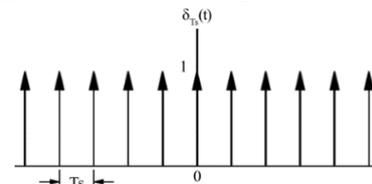
Fonte: (LATHI, 2006).

Trem de Impulso Unitário

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (6)$$

Um trem de impulsos é constituído por impulsos unitários periodicamente repetidos a cada T_s segundos (LATHI, 2006; OPPENHEIM et al., 1997). Pode-se definir matematicamente um trem de impulsos como um somatório de impulsos deslocados de nT_s , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, conforme a Eq. (6). O gráfico para essa função é apresentado na Figura 3. O trem de impulsos é comumente empregado na análise da amostragem de sinais, de modo que cada impulso passa a representar uma amostra do sinal original no seu equivalente instante de tempo.

Figura 3 – Trem de Impulsos Unitários



Fonte: (LATHI, 2006).

Amostragem

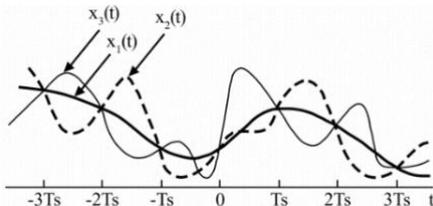
Sob certas condições, um sinal contínuo pode ser completamente representado por amostras de pontos específicos desse sinal. Esse mesmo sinal pode também ser reconstruído a partir das mesmas amostras. Tal propriedade é fundamentalmente importante para a conversão de sinais analógicos para digitais e vice-versa. Um arquivo de música armazenado em um *smartphone* é um exemplo da aplicação dessa propriedade. Esse arquivo descreve um som, que após sofrer transdução, foi amostrado para poder ser comprimido e armazenado em mídia digital. Um vídeo é um outro exemplo. As imagens que percebemos no mundo real (nossos olhos são nossos sensores para transdutá-las para um sinal elétrico a ser interpretado pelo cérebro) se encontram numa espécie de informação analógica, e assim como uma música, precisa que amostras de pontos específicos sejam feitas a partir do sinal original, para que este possa ser armazenado em

formato digital. No caso específico do arquivo de vídeo, cada imagem amostrada recebe o nome de “frame”, que representa um instante em um universo de tempo contínuo, mas que também é composta por pixels, amostras espaciais ligadas à resolução daquela imagem.

Teorema da amostragem

De modo geral, na ausência de qualquer condição ou informação adicional, não esperamos que um sinal possa ser unicamente especificado por uma sequência de amostras igualmente espaçadas no tempo. Por exemplo, a Figura 4 ilustra três sinais diferentes de tempo contínuo, os quais possuem os mesmos valores nos intervalos de tempo múltiplos inteiros de T_s .

Figura 4 – Três sinais no tempo contínuo com os mesmos valores de amostras



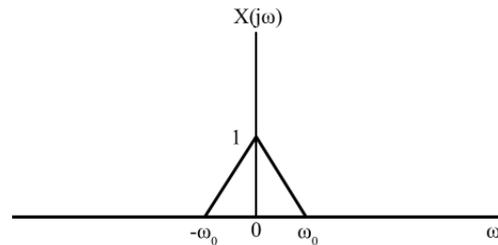
Fonte: (OPPENHEIM et al., 1997).

Observa-se que um número infinito de sinais pode ser gerado a partir de um conjunto de amostras. Todavia, se um sinal é limitado em banda e se o intervalo de tempo entre uma amostra e outra é suficientemente pequeno, então as amostras representam unicamente este sinal, de modo que esse sinal pode ser perfeitamente reconstruído (OPPENHEIM et al., 1997). Esse resultado é conhecido como teorema da amostragem e é de fundamental importância para a análise de sinais e sistemas. Esse teorema é definido da seguinte forma: considerando $x(t)$ um sinal com largura de banda limitada, isto é, com $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_0$, como na Figura 5, então $x(t)$ é unicamente representado por suas amostras $x(nT_s)$ se $\omega_s > 2\omega_0$, em que $\omega_s = 2\pi f_s$ é a frequência angular de amostragem do sinal. Se o conjunto de amostras obedece a tal critério, pode-se então reconstruir $x(t)$ a partir do conjunto de amostras (OPPENHEIM et al., 1997).

A Figura 5 exibe o espectro de frequência de um dado sinal $x(t)$, já limitado em banda. Modulando o trem de impulsos unitários da Figura 3 com o sinal $x(t)$, obtém-se um sinal cujo espectro de frequência é descrito pela seguinte equação:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - n\omega_s)) \quad (7)$$

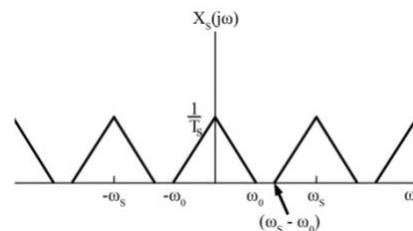
Figura 5 – Espectro de Frequência $X(j\omega)$



Fonte: elaborada pelos autores.

Por essa equação, temos que a transformada de Fourier do sinal amostrado $x_s(t)$, $X_s(j\omega)$ consiste em réplicas da transformada de Fourier do sinal $x(t)$, $X(j\omega)$, centradas em múltiplos de ω_s , como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Espectro de frequência $X_s(j\omega)$

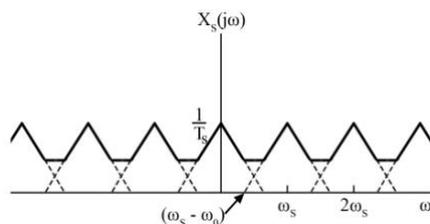


Fonte: (OPPENHEIM et al., 1997).

Aliasing

Caso a frequência de amostragem não seja maior que duas vezes a maior frequência do sinal amostrado, i.e., $\omega_s \leq \omega_0$, as réplicas de $X(j\omega)$ se sobrepõem (Figura 7) e $X(j\omega)$ original não mais fica recuperável por um filtro passa baixa, o qual seria responsável por remover as réplicas do espectro do sinal amostrado. Assim, o sinal original não poderá mais ser obtido, pois existe uma distorção no sinal que seria recuperado. Este fenômeno denomina-se *aliasing*.

Figura 7 – Espectro do sinal amostrado com $\omega_s \leq 2\omega_0$



Fonte: (OPPENHEIM et al., 1997).

Efeito estroboscópico

O estroboscópio é um instrumento que gera uma luz pulsante a uma frequência fixa, a qual pode ser utilizada para iluminar um determinado objeto em movimento. Para observarmos o efeito estroboscópico, realizamos o seguinte experimento: colocamos uma fita vermelha em uma das hélices de um ventilador e o iluminamos através de um aparelho estroboscópico de frequência ajustável (de 0 a 20 Hz através de um potenciômetro). Ao ligarmos o ventilador, o flash do estroboscópio age como um sistema de amostragem, iluminando a fita vermelha em alguns instantes. Dependendo da relação entre as frequências de amostragem (luz pulsante estroboscópica) e de giro do ventilador, observamos efeitos visuais diversos e curiosos gerados por uma subamostragem. É uma forma didática de se entender como funciona o *aliasing* na prática. Com o *aliasing*, frequências mais altas são refletidas em frequências mais baixas (OPPENHEIM et al., 1997). Assim, dependendo da relação de frequências citada, teremos uma percepção diferente do giro do objeto em questão. Um outro detalhe que deve ser observado quando retratamos esse efeito diz respeito à persistência da retina humana. Com isso, a percepção do fenômeno descrito pode ser ainda mais acentuada.

METODOLOGIA

A condução deste estudo seguiu basicamente cinco etapas, sendo elas: estudo bibliográfico, simulação, modelagem do sinal, amostragem do sinal e determinação das faixas de frequências. Cada etapa será discutida com maiores detalhes em sua respectiva subseção,

com enfoque nas decisões que foram tomadas e nas respectivas justificativas.

Estudo bibliográfico

Um estudo bibliográfico foi realizado para compreender a relação matemática envolvida no processo de amostragem de sinais de tempo contínuo e para entender os fenômenos conhecidos, como efeito estroboscópico e *aliasing*, e como eles estão relacionados.

Simulação

De forma a ter um controle preciso sobre as variáveis descritas no processo (frequências de amostragem e de giro do objeto), optou-se por realizar uma simulação do efeito estroboscópico. Para demonstrar o efeito estroboscópico, foi desenvolvida uma ferramenta que permite obter amostras de um movimento circular uniforme de raio unitário, ou seja, amostras de uma trajetória com velocidade angular constante ao longo da circunferência trigonométrica. A trajetória representa o giro da fita afixada em uma das hélices do ventilador e a amostragem representa o *flash* do estroboscópio. Por se tratar de um círculo trigonométrico, as decomposições de um ponto localizado em cima da circunferência, nas componentes vertical e horizontal, são por definição o seno e o cosseno, respectivamente, do arco trigonométrico. Por motivos de simplificação, utilizaremos apenas uma dessas decomposições: o movimento de uma cossenoide a uma determinada frequência. Os testes envolveram a variação das frequências de amostragem, de acordo com as faixas de frequências encontradas analiticamente. Para o desenvolvimento do simulador, utilizou-se inúmeras ferramentas. A princípio foram utilizadas as linguagens *Java* e *JavaScript* e a plataforma *Unity*. Contudo, ao longo do processo, o *Matlab* se mostrou mais adequado. Dessa maneira, optou-se pelo *Matlab* como plataforma para a construção da simulação final.

Modelagem do sinal

Um dos requisitos mais importantes para o estudo de fenômenos físicos é que seja feita a modelagem matemática dos eventos envolvidos. A modelagem matemática, de uma forma simples, resume-se à criação de um modelo matemático (um padrão ou fórmula matemática) para explicação ou compreensão de um fenômeno natural. Dessa forma, conforme exposto na subseção anterior, devido à natureza do movimento, utilizar-se-á uma função cossenoidal para representar o sinal a ser amostrado, conforme as seguintes relações:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (8)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (9)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (10)$$

em que:

ω_0 : Frequência angular dada em radianos por segundo (rad/s);

f_0 : Frequência fundamental dada em Hertz (Hz);

T_0 : Período fundamental dado em segundos (s).

Amostragem do sinal

Para representar um sinal como uma sequência de amostras igualmente espaçadas, foi utilizada a amostragem por trem de impulsos (OPPENHEIM et al., 1997), em que um sinal contínuo no tempo $x(t)$ é multiplicado por uma função de amostragem $\delta_{T_s}(t)$ definida por um trem de impulsos periódicos (Eq. 6). No domínio do tempo, temos:

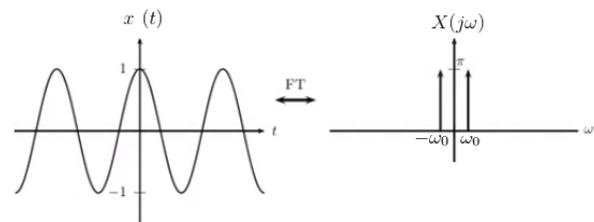
$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \quad (11)$$

em que T_s é o período de amostragem e, portanto, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ é a frequência angular de amostragem.

Na Figura 9, é possível ver a forma de onda do sinal a ser estudado, definido na Equação 8, bem como o seu espectro de frequência. Ao multiplicar $x(t)$ por um impulso unitário,

obtemos uma amostra desse sinal na posição do impulso em questão. Com isso, temos que $x_s(t)$ é um trem de impulsos em que as amplitudes são iguais às amostras de $x(t)$ em intervalos espaçados por T_s , de acordo com a Equação 12. A Figura 10 exibe o trem de impulsos ponderado, representando o sinal amostrado, e o seu espectro de frequência, que são réplicas periódicas do espectro do sinal original.

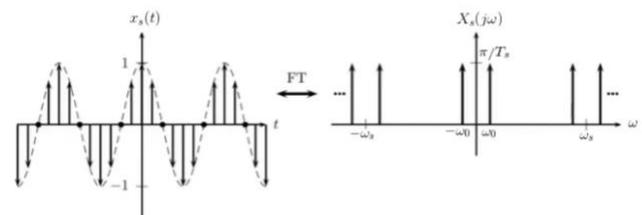
Figura 9 – Sinal original e sua transformada de Fourier



Fonte: (OPPENHEIM et al., 1997).

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (12)$$

Figura 10 – Sinal amostrado e sua transformada de Fourier



Fonte: (OPPENHEIM et al., 1997).

Determinação das faixas de frequências

Para compreender o efeito estroboscópico à luz da relação entre as frequências presentes nesse fenômeno (frequências de amostragem e de giro), foram estabelecidos analiticamente diferentes intervalos para os quais a impressão de movimento ocorre com um padrão diferente para cada um deles. Determinou-se esses intervalos a partir de uma análise no domínio do tempo e/ou a partir de uma análise no domínio da frequência. A definição dos intervalos de frequência levou em consideração o critério definido por Nyquist (LANDAU, 1967). Assim, foram encontrados cinco casos diferentes, sendo eles:

- $\omega_s > 2\omega_0$
- $\omega_s = \frac{2\omega_0}{(2n-1)}$
- $\frac{\omega_0}{n} < \omega_s < \frac{2\omega_0}{(2n-1)}$
- $\omega_s = \frac{\omega_0}{n}$
- $\frac{2\omega_0}{(2n+1)} < \omega_s < \frac{\omega_0}{n}$

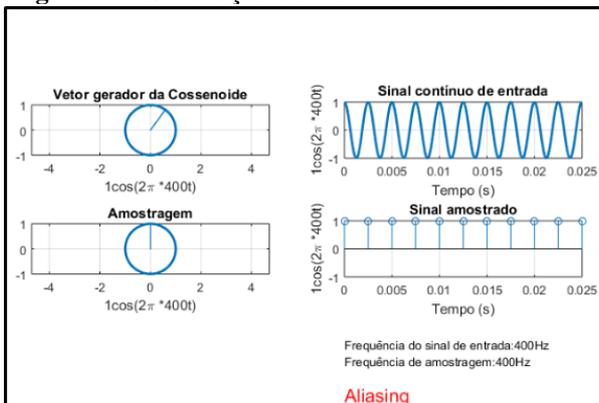
É importante observar que esses intervalos estão generalizados. Assim, teremos inúmeros intervalos de frequência com a variação do n , sendo n pertencente ao conjunto dos números naturais não nulos. Após encontrar esses intervalos de frequência e atribuir valores a n , fez-se as devidas simulações, buscando corroborar os padrões dos intervalos obtidos de forma analítica com os resultados observados na simulação.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Simulação

O simulador desenvolvido pode ser observado na Figura 11. No simulador são exibidas quatro animações diferentes, a saber: o vetor gerador da cossenoide, o movimento de rotação gerado pela amostragem, o sinal contínuo de entrada e o sinal amostrado. Com isso, entre outras características, pode-se verificar o efeito estroboscópico a partir de diferentes relações de frequências.

Figura 11 – Simulação do movimento do ventilador



Fonte: acervo dos autores.

Casos analisados

Foram analisados vários intervalos de frequência diferentes. Com isso pudemos inferir qual seria a percepção de um ser humano, com relação ao movimento do ventilador, dados diferentes intervalos para a relação entre as frequências de amostragem e de giro. Vale salientar que esse processo de análise foi realizado buscando compreender o efeito da subamostragem, cuja implicação direta é o *aliasing*. Identificou-se cinco efeitos possíveis, nomeados de superamostragem, movimento alternado, sentido contrário, estacionário e sentido original com frequência menor. Apesar da faixa de frequência presente na superamostragem não gerar *aliasing*, ainda assim ela foi considerada. Isso é de significativa importância, pois fornece uma maneira de contrastar com os casos geradores de *aliasing*.

Na prática, com o giro do ventilador, seria ínfima a probabilidade de termos fase zero no cosseno. Ter fase zero significaria a sincronia perfeita entre o giro e a amostragem. Em função disso, consideremos uma fase ϕ no cosseno da Equação 8 para todas as cinco subseções seguintes. Outro detalhe seria o sentido do giro. O sentido de giro no círculo trigonométrico é o sentido anti-horário, e o sentido de giro do ventilador é o sentido horário. Poder-se-ia então acrescentar um sinal de menos no cosseno. Entretanto, não o fizemos porque os resultados seriam os mesmos, independentemente do sentido de giro, em virtude da simetria dos movimentos. Vale salientar que nas figuras que ilustram cada caso analisado, (a) representa o espectro de magnitude, e (b) o espectro de fase

Superamostragem $\omega_s > 2\omega_0$

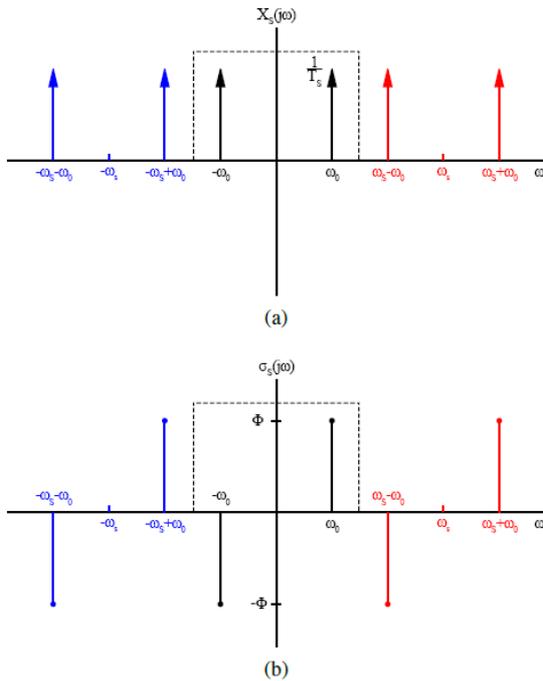
Para a faixa correspondente à superamostragem, respeitando, portanto, a taxa de *Nyquist*, a velocidade de rotação do ventilador é percebida corretamente. Com isso, o sentido de rotação visto por um ser humano será o movimento “natural” do ventilador. Isso acontece pelo fato de o período de amostragem ser suficientemente adequado para representar o sinal de entrada, evitando que ocorram ciclos entre pontos de amostragem distintos.

Considerando o domínio do tempo, essa situação ocorreria quando $T_s < \frac{T_0}{2}$.

Para melhor compreensão do que ocorre com o sinal amostrado, na Figura 12 podemos observar o seu espectro de frequência. Neste momento, vale esclarecer que o espectro de frequência é composto pelos espectros de magnitude e de fase.

A partir da Figura 12, podemos perceber que o sinal amostrado não gera *aliasing*. Assim, diante de tal situação posta, pode-se afirmar que o sinal de entrada é recuperável. Dessa maneira, para recuperar o sinal de entrada, bastaria aplicar um filtro passa baixa com frequência de corte $\frac{\omega_s}{2}$. Realizando esse procedimento, o sinal recuperado seria equivalente ao sinal de entrada, neste caso $\cos(\omega_0 t + \phi)$, cujo espectro de frequência vale $\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0)$.

Figura 12 – Espectro para o caso de Superamostragem



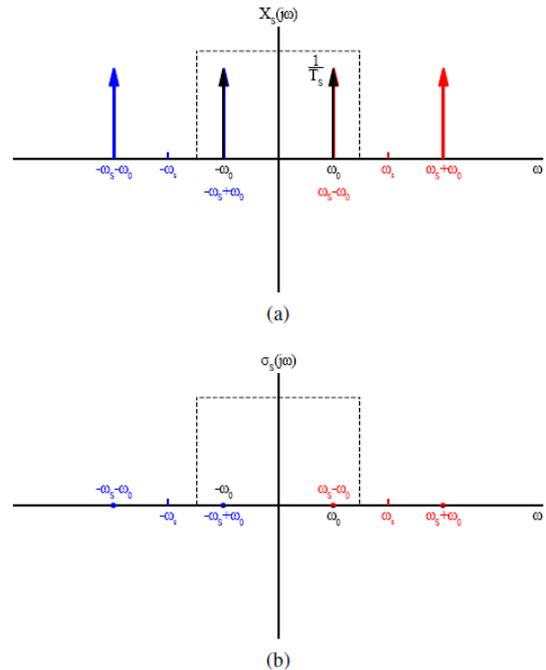
Fonte: elaborada pelos autores.

Movimento alternado $\omega_s = \frac{2}{(2n-1)} \omega_0$

Para que o teorema de Nyquist seja respeitado é necessário que a frequência de amostragem seja maior que duas vezes a máxima frequência do sinal amostrado. Dessa forma, mesmo que a frequência de amostragem

seja igual a duas vezes a frequência do ventilador, caso para $n = 1$, ainda assim teremos *aliasing*. Em outras palavras, $\omega_s = 2\omega_0$ não é suficiente para atender ao critério estabelecido. Assim, para esta última relação de frequência, o sinal de entrada será amostrado exatamente duas vezes a cada ciclo. A relação de frequências $\omega_s = \frac{2}{(2n-1)} \omega_0$ impele um movimento alternado ao ventilador. No domínio do tempo, essa situação estaria presente quando $T_s = (2n - 1) \frac{T_0}{2}$. Para $n > 1$ fica bem claro que a frequência de amostragem não conseguirá ser maior que duas vezes a frequência do sinal amostrado, e o sinal original não poderá ser recuperado, pois o denominador aumentará cada vez mais. Já para $n = 1$, em que $\omega_s = 2\omega_0$, tomemos a Figura 13 para melhor visualização. Nela podemos observar a ocorrência da sobreposição da fase. Para esse caso, também não é possível recuperar o sinal original, uma vez que a reconstrução correta do sinal seria $\cos(\omega_0 t + \phi)$.

Figura 13 – Espectro para o caso onde $\omega_s = 2\omega_0$



Fonte: elaborada pelos autores.

Sentido contrário $\frac{\omega_0}{n} < \omega_s < \frac{2}{(2n-1)} \omega_0$

Adaptando o teorema de Nyquist ao contexto do efeito estroboscópico, quando a frequência do estrobo se torna menor que o

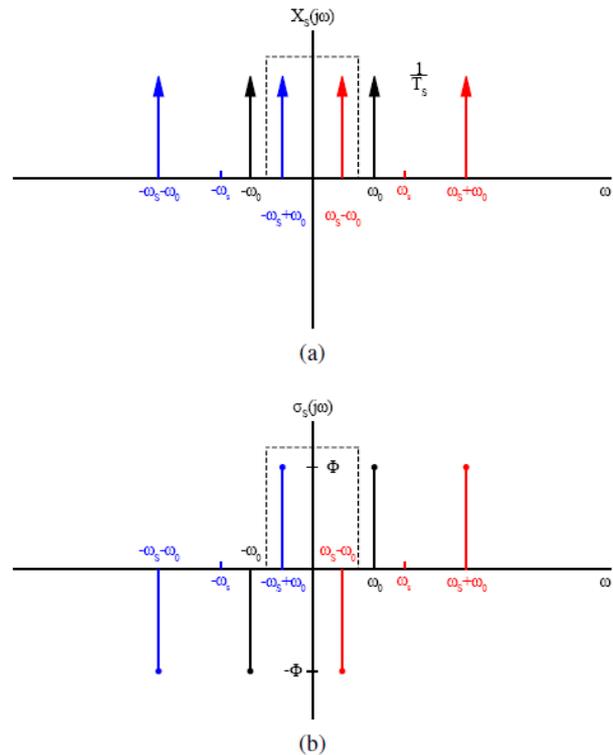
dobro da frequência de rotação do ventilador, a rotação deste aparenta estar em uma frequência menor que a real. Para o intervalo considerado, além da ocorrência do *aliasing*, temos também a inversão de fase do sinal. Com isso, o ventilador aparentará estar girando de forma mais lenta e no sentido contrário. No domínio do tempo, essa situação se daria quando $(2n - 1) \frac{T_0}{2} < T_s < nT_0$.

Como podemos perceber na Figura 14, na qual é ilustrado o caso para $n = 1$, o sinal em questão não é recuperável. Caso fosse aplicado um filtro passa baixa, o sinal recuperado seria diferente do sinal de entrada. Assim, o sinal recuperado seria equivalente a $\cos[(\omega_s - \omega_0)t - \phi]$ ao invés de $\cos(\omega_0 t + \phi)$. É importante perceber a ocorrência da inversão da fase. Isso indica que um movimento no sentido contrário será percebido por um observador externo, em que o papel de filtro passa baixa é feito pela persistência retiniana. Para as frequências de giro de um ventilador comum e frequência de amostragem menor ou igual a 20 Hz (caso vigente), a frequência de corte desse filtro será menor que a frequência ω_0 , evidenciando a aparência de giro mais lento no sentido contrário. Para o caso em que $n > 1$, as inversões de fase também ocorrem, mas a frequência aparente de giro vai ficando cada vez menor à medida que n aumenta.

Estacionário $\omega_s = \frac{\omega_0}{n}$

A percepção estacionária do giro, isto é, quando a fita ou a hélice do ventilador aparentam estar paradas, ocorre quando a frequência angular de amostragem é igual à frequência angular do sinal amostrado dividida por n , sendo n um número natural não nulo, conforme já frisado anteriormente. No domínio do tempo, isso ocorre quando $T_s = nT_0$.

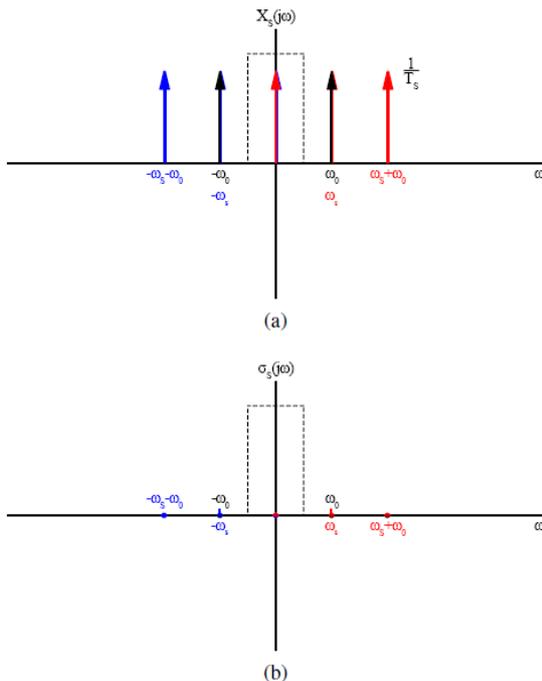
Figura 14 – Espectro para o caso de sentido anti-horário



Fonte: elaborada pelos autores.

Nesse caso, estaremos amostrando a fita ou a hélice do ventilador sempre na mesma posição, podendo ocorrer um ou mais giros completos entre uma amostra e outra, dependendo do valor de n . Cada amostra obtida do sinal original possuirá o mesmo valor de amplitude do cosseno, como se o sinal fosse constante, ou de frequência nula. Na Figura 15 pode-se observar o espectro de frequência para este caso.

Figura 15 – Espectro para o caso estacionário



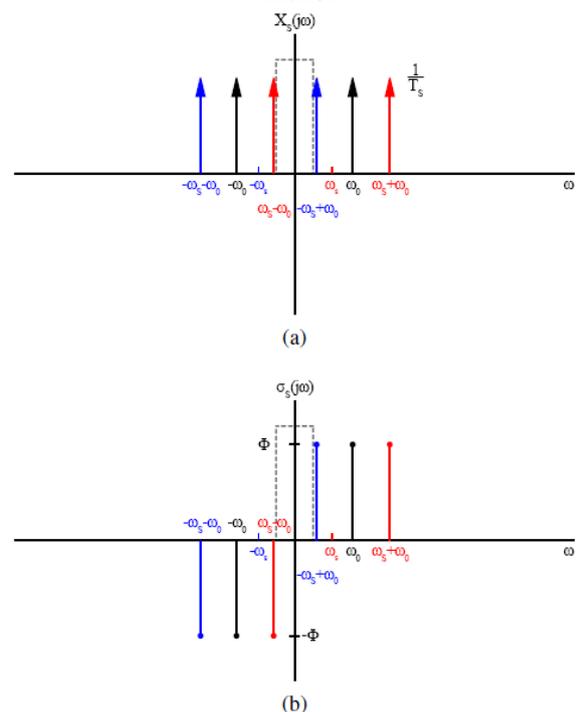
Fonte: elaborada pelos autores.

$$\text{Frequência menor } \frac{2}{(2n+1)} \omega_0 < \omega_s < \frac{\omega_0}{n}$$

Para esse intervalo de frequência um observador externo terá a impressão de giro mais lento da fita ou hélice do ventilador no mesmo sentido do giro original. Nesse caso, teremos $nT_0 < T_s < \frac{(2n+1)}{2} T_0$ em relação ao domínio do tempo, de modo que, entre uma amostra e outra, poderá ter ocorrido um ou mais ciclos completos desse sinal, tendo a outra amostra acontecido em algum momento do primeiro semiciclo seguinte.

Como podemos perceber, na Figura 16, na qual é ilustrado o caso para $n = 1$, caso fosse aplicado um filtro passa baixa, o sinal recuperado seria equivalente a $\cos[(\omega_0 - \omega_s)t - \phi]$ ao invés de $\cos(\omega_0 t + \phi)$. Para o caso em que $n > 1$, as fases também serão mantidas, mas a frequência aparente de giro vai ficando cada vez menor à medida que n aumenta.

Figura 16 – Espectro para o caso de frequência menor



Fonte: elaborada pelos autores.

CONCLUSÃO

Este estudo descreveu o processo de análise das frequências envolvidas no efeito estroboscópico, a partir do movimento de rotação de um ventilador. Buscou-se compreender a relação entre as frequências presentes nesse fenômeno e a ocorrência do *aliasing*. Diante disso, percebeu-se que a reconstrução do sinal original é possível apenas nos casos em que a frequência de amostragem é maior que duas vezes a frequência do sinal amostrado. Assim, a análise feita se pautou inteiramente nessa premissa.

Notou-se, também, que ao aproximar a frequência de giro da fita ou hélice do ventilador (ω_0) e a frequência de amostragem (ω_s) ocorria o *aliasing*. Nas situações em que esse fenômeno ocorre, a frequência do sinal recuperado é alterada em relação à do sinal original, dando a impressão de que o ventilador está girando em uma velocidade e/ou direção diferente, ou até mesmo parado. Corroborando as análises acima com a simulação (além da observação propriamente dita do fenômeno com um estroboscópio e um ventilador), ratificou-se os quatro intervalos que originam o

aliasing, denominados neste trabalho como i) Movimento alternado; ii) Sentido contrário; iii) Estacionário; e iv) Frequência menor. O caso em que ocorre a superamostragem não foi incluído nessa lista, uma vez que nessa situação não se verifica o problema do *aliasing*. A “persistência retiniana” faz o papel de filtro passa baixa nos casos descritos.

REFERÊNCIAS

- JERRI, A. J. The Shannon sampling theorem - Its various extensions and applications: A tutorial review. **Proceedings of the IEEE**, v. 65, n. 11, p. 1565-1596, 1977.
- ANGELO, M. F. et al. Aplicação e avaliação do método PBL em um componente curricular integrado de programação de computadores. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 33, n. 2, 2014.
- ANGELO, M. F.; BERTONI, F. C. Análise da Aplicação do Método PBL no Processo de Ensino e Aprendizagem em um Curso de Engenharia de Computação. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 30, n. 2, p. 35-42, 2012.
- BITTENCOURT, R. A. et al. Projeto do Curso de Engenharia de Computação da Universidade Estadual de Feira de Santana. **Universidade Estadual de Feira de Santana**, Feira de Santana, 2002.
- BRACEWELL, R. N.; BRACEWELL, R. N. **The Fourier transform and its applications**. New York: McGraw-Hill, 1986.
- CANESIN, C. A. **Qualidade da Energia Elétrica, Eficiência e Racionalização, Desperdício versus Desconhecimento**. Ilha Solteira: UNESP, 2001.
- CASTANIÉ, F. (Ed.). **Spectral analysis: parametric and non-parametric digital methods**. John Wiley & Sons, 2013.
- PASTANA, S. G.; GOMES, E.; CASTRO, L. Conduta fonoaudiológica e avaliação estroboscópica no diagnóstico diferencial do cisto. **Revista CEFAC**, v. 9, n. 3, p. 397-403, 2007.
- EASTMAN, A. A.; CAMPBELL, J. H. Stroboscopic and flicker effects from fluorescent lamps. **Illuminating Engineering**, v. 47, n. 1, p. 27-35, 1952.
- FRIER, J. P.; HENDERSON, A. J. Stroboscopic effect of high intensity discharge lamps. **Journal of the Illuminating Engineering Society**, v. 3, n. 1, p. 83-86, 1973.
- GUEDES, M. V. Laboratório de Máquinas Elétricas-Estroboscopia. **Porto: FEUP**, 2002. Disponível em: <https://paginas.fe.up.pt/maquel/TLME/LME_stroboscopia.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2020.
- LANDAU, H. J. Sampling, data transmission, and the Nyquist rate. **Proceedings of the IEEE**, v. 55, n. 10, p. 1701-1706, 1967.
- LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares-2**. Bookman, 2006.
- LOPES, J. **Tecnologia Retrô: O Phenakistoscope, 1841, 2013**. Disponível em: <<http://www.ideafixa.com/oldbutgold/tecnologia-retro-o-phenakistoscope-1841>>. Acesso em: 21 set. 2020.
- NISHIYAMA, Y. Mathematics of Fans. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 78, n. 5, p. 669-678, 2012.
- OPPENHEIM, A. V. et al. Nome Abreviado. et al. **Signals & Systems**. 2 ed, revisada. Prentice Hall, 1997.
- REA, M. S.; OUELLETTE, M. J. Table-tennis under high intensity discharge (HID) lighting. **Journal of the Illuminating Engineering Society**, v. 17, n. 1, p. 29-35, 1988.
- VAN VEEN, F. **Handbook of stroboscopy**. General Radio, 1966.
- WOODS, D R. Problem-based Learning: Resources to Gain the Most from PBL. 2. Ed. D.R. Woods, 1997.

DADOS BIOGRÁFICOS DOS AUTORES



José Solenir Lima Figuerêdo – É graduando em Engenharia de Computação pela Universidade Estadual de Feira de Santana. Atualmente é pesquisador no laboratório ADAM (*Advanced Data Analysis and Management*). Atua em áreas de pesquisa voltadas para: educação em computação, análise de redes sociais, aprendizado de máquina, aprendizado profundo, processamento de linguagem natural e ciência cognitiva.



Caique dos Santos Trindade – É graduando em Engenharia de Computação pela Universidade Estadual de Feira de Santana. Atualmente participa de um projeto de extensão voltado para o engajamento estudantil no curso de Engenharia de Computação na própria universidade. Além disso, atua em áreas de pesquisa voltadas para: educação em computação, jogos digitais, ciência cognitiva e gestão do conhecimento.



Weverson dos Santos Gomes – Nascido em Feira de Santana, Brasil, em 1991. Recebeu o título de Bacharel em Engenharia de Computação em 2019, pela Universidade Estadual de Feira de Santana. É membro do Conselho Federal de Engenharia e Agronomia desde 2019. Atualmente atua como engenheiro de *software* junto à empresa SimHub SA, Suíça.



Edgar Silva Júnior – Possui Graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia – UFU (2000), Mestrado em Engenharia Elétrica pela UFU (2003) e Doutorado em Engenharia Elétrica pela UFU (2007). Atualmente integra o corpo docente da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) como Professor Adjunto em dedicação exclusiva do Departamento de Tecnologia (DTEC), tendo atuado inclusive como Professor do Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PGCA). Seus interesses de docência e pesquisa estão relacionados à área de Telecomunicações, principalmente nos seguintes temas: modelagem de propagação de ondas eletromagnéticas, processamento digital de sinais, comunicações digitais e comunicações móveis.