

O PROCESSO DE CROSS DERIVADO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

João Cyro André*

ANDRÉ, João Cyro. O processo de Cross derivado do Método dos Deslocamentos. *Rev. Ensino Eng.*, São Paulo, 4 (2): 110-115, 2.º sem. 1985.

Métodos e processos de cálculo com mesmas hipóteses básicas mas com tratamentos numéricos distintos têm sido, muitas vezes, interpretados de forma estanque, como se fossem procedimentos não-relacionados. É o que ocorre com o método dos deslocamentos e o processo de Cross. Trata-se, neste artigo, de mostrar que o processo de Cross é derivado do método dos deslocamentos, e que o algoritmo das aproximações sucessivas do processo de Cross é equivalente ao método iterativo de Gauss-Seidel por passos parciais.

Análise estrutural. Pórtico plano. Método dos deslocamentos. Método de Cross.

ANDRÉ, João Cyro. The Cross process derived from the Displacement Method. *Rev. Ensino Eng.*, São Paulo, 4(2) 110-115, 2nd. sem. 1985.

Calculation methods and processes which have the same basic hypotheses but which present different numerical treatments have often been interpreted as if they were unrelated procedures. This happens to the displacement method and the Cross process. This paper shows that the Cross process derives from the displacement method, and that the successive approach algorithm in the Cross process is equivalent to the iterative method by partial steps of the Gauss-Seidel process.

Structural analysis. Plane frame. Displacement methods. Cross method.

1 INTRODUÇÃO

O processo de Cross, apresentado por Hardy Cross, em 1932, para a resolução de vigas contínuas e pórticos planos, é ensinado em quase todas as escolas de Engenharia Civil do País, e se constitui em instrumento de grande utilidade na análise estrutural, quer do ponto de vista didático quer do ponto de vista de utilização profissional.

A partir da década de 70, a utilização do processo de Cross em escritórios, que era razoavelmente corriqueira, começou a sofrer uma queda na sua "popularidade", em virtude da possibilidade de cálculos automáticos, usando computadores, fundamentados no método dos deslocamentos. Hoje, praticamente se vulgarizou o cálculo automático de estruturas reticuladas, com o emprego de computadores e de microcomputadores, o que tornou praticamente obrigatório o ensino do método dos deslo-

camentos em cursos de graduação de Engenharia Civil.

Chama-se a atenção para o fato de que não se pretende aqui sugerir a eliminação do processo de Cross dos cursos que tratam de análise estrutural, por dois motivos fortes: a sua importância didática e a sua utilidade profissional, visto que nem todos terão acesso a computadores ou microcomputadores, principalmente aqueles que, trabalhando em pontos distantes dos grandes centros, não poderão prescindir de uma ferramenta tão preciosa.

O objetivo deste trabalho é mostrar claramente que o processo de Cross, um procedimento de cálculo por aproximações sucessivas, adequado para cálculos manuais por uma engenhosa maneira de resolver sistemas de equações lineares, é um processo claramente derivado do método dos deslocamentos.

2 RESOLUÇÃO DE PÓRTICO PLANO PELO MÉTODO DE CROSS

Considere-se o pórtico plano formado por barras

* Professor Assistente Doutor do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações — POLI/USP.

prismáticas diferentes entre si e solicitado conforme se indica na Figura 1:

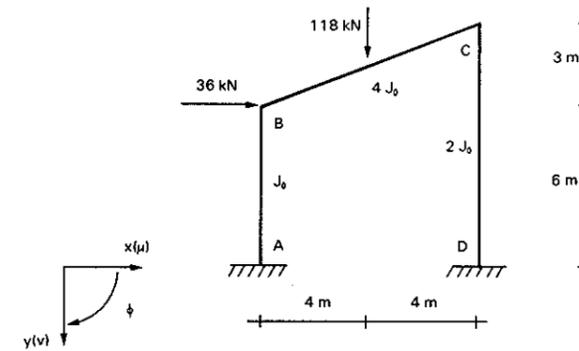


Figura 1

Trata-se de pórtico com 1 grau de deslocabilidade externa, e a sua análise é feita, no processo de Cross, aplicando-se o princípio da superposição de efeitos, conforme se indica na Figura 2.

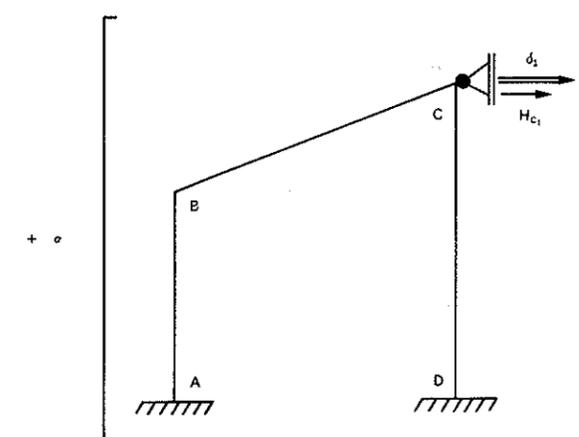
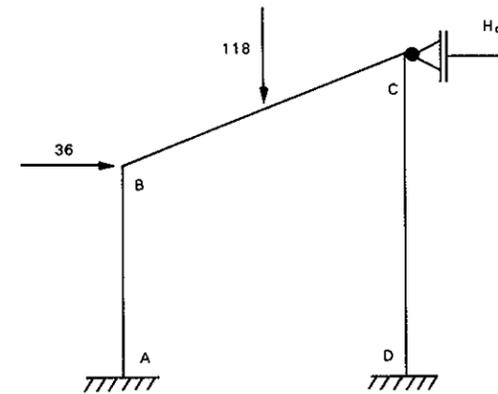


Figura 2

Inicialmente resolve-se o pórtico, tornado indesejável pela introdução adequada do vínculo em C, solicitado apenas pelo carregamento externo. A aplicação do algoritmo de aproximações sucessivas, apresentado na Figura 3, conduz explicitamente aos momentos finais que as extremidades das barras aplicam aos nós e implicitamente às rotações em B e C (Φ_B e Φ_C) e à reação H_C .

AB	BA	BC	CB	CD	DC	
	0,263	0,737	0,678	0,322		
		11800	-11800			(kN.cm)
		4000	8000	3800	1900	
-2078	-4155	-11645	-5822			
		1974	3947	1875	937	
-260	-519	-1455	-727			
		246	493	234	117	
-32	-65	-181	-91			
		31	62	29	15	
-4	-8	-23	-11			
		4	7	4	2	
	-1	-3	-1			
			1			
-2374	-4748	4748	-5942	5942	2971	

Figura 3

$$(2.1) H_C = -37,97 \text{ kN}$$

$$(2.2) \Phi_B \approx \frac{1}{2,539 EJ_0} (158 + 19,74 + 2,46 + 0,31 + 0,04) = \frac{71,11}{EJ_0}$$

$$(2.3) \Phi_C \approx \frac{1}{2,762 EJ_0} (-118 - 58,22 - 7,27 - 0,91 - 0,11 - 0,01) = \frac{-66,81}{EJ_0}$$

Observa-se que as rotações em B e C são calculadas por aproximações sucessivas pela relação entre a soma dos momentos desequilibrados e a rigidez à rotação, em cada nó.

Em seguida resolve-se o pórtico tornado indesejável submetido a ação de recalque, com um valor arbitrado $\delta_1 = 10000/EJ_0$ kN.cm. A aplicação do algoritmo das aproximações sucessivas, apresentado na Figura 4, conduz aos momentos fletores que as extremidades das barras aplicam aos nós e às rotações em B e C (Φ_B e Φ_C) e à reação H_C .

AB	BA	BC	CB	CD	DC	
	0,263	0,737	0,678	0,322		
1667	1667			1481	1481	(kN.cm)
-219	-438	-1229	-614			
		-294	-588	-279	-140	
39	77	217	108			
		-37	-73	-35	-17	
5	10	27	14			
		-5	-9	-5	-3	
	1	4	2			
			-2			
1492	1317	-1317	-1162	1162	1321	

Figura 4

(2.4) $H_{c1} = 7,44 \text{ kN}$

(2.5) $\Phi_{B1} \approx \frac{1}{2,539 EJ_0} (16,67 - 2,84 - 0,37 - 0,05) = \frac{5,24}{EJ_0}$

(2.6) $\Phi_{C1} \approx \frac{1}{2,762 EJ_0} (8,67 + 1,08 + 0,14 + 0,02) = \frac{3,59}{EJ_0}$

A solução do pórtico da Figura 1 é dada então pela aplicação do princípio da superposição dos efeitos, conforme se indica na Figura 2, com α tal que seja satisfeita a equação de equilíbrio:

(2.7) $H_{cL} + \alpha H_{c1} = 0 \quad -37,97 + \alpha 7,44 = 0$

ou seja, $\alpha = 5,103$. Um resumo dos principais resultados é representado na Figura 5.

$\Phi_B \approx 97,85/EJ_0 \text{ rd}$
 $\Phi_C \approx 48,59/EJ_0 \text{ rd}$
 $\mu_C \approx 510,30/EJ_0 \text{ rd}$
 com EJ_0 em kNm^2

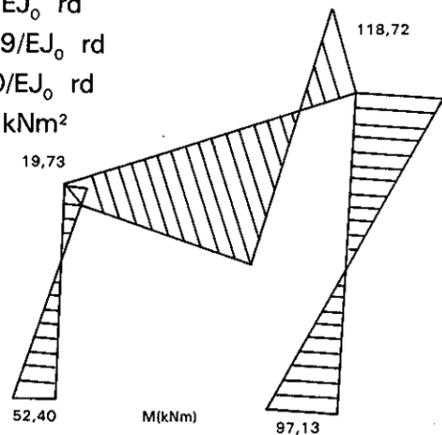


Figura 5

3 RESOLUÇÃO DE PÓRTICO PLANO PELO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS. EQUACIONAMENTO ADEQUADO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA COMPARAÇÃO COM O PROCESSO DE CROSS

Analisa-se agora o mesmo pórtico plano da Figura 1 pelo método dos deslocamentos, mas tratando de escrever as equações reduzidas de equilíbrio de modo adequado para comparações com o processo de Cross. Para que a comparação seja possível, admite-se a inextensibilidade das barras e, deste modo, o grau de deslocabilidade se reduz a 3, sendo pois incógnitas do problema os deslocamentos Φ_B e Φ_C , angulares, e μ_C , linear, que serão indicados, respectivamente, por D_1 , D_2 e D_3 .

Resolver o pórtico plano pelo método dos deslocamentos consiste em obter no conjunto de todas as soluções compatíveis (que se obtêm atribuindo valores arbitrários a D_1 , D_2 e D_3) aquela que também é equilibrada, ou seja, que satisfaz as equações de equilíbrio reduzidas. As soluções compatíveis são obtidas a partir da combinação de soluções encontradas no pórtico plano tornado indeslocável (com $D_1 = D_2 = D_3 = 0$) e submetido isoladamente às ações carregamento externo, recalque de apoio $D_1 = 1$, recalque de apoio $D_2 = 1$ e recalque de apoio $D_3 = 1$, conforme se indica na Figura 6. O princípio da superposição de efeitos justifica a combinação.

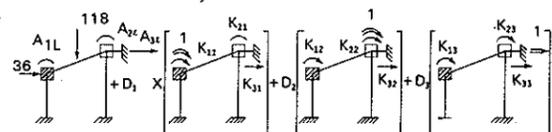


Figura 6

Portanto a solução compatível que também é solução do problema é aquela que satisfaz as equações reduzidas de equilíbrio

(3.1) $A_i = A_{iL} + K_{ij}D_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$

onde:

A_i são as forças nodais correspondentes aos deslocamentos D_j

A_{iL} são as forças nodais reativas na estrutura bloqueada correspondentes aos deslocamentos D_j e devidas ao carregamento externo

K_{ij} são as forças nodais reativas na estrutura bloqueada correspondentes aos deslocamentos D_j e devidas ao deslocamento $D_j = 1$.

Após alguns cálculos, obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio, correspondentes ao pórtico plano:

(3.2) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118 \\ 118 \\ -36 \end{bmatrix} + EJ_0 \begin{bmatrix} 2,539 & 0,936 & -0,167 \\ 0,936 & 2,762 & -0,148 \\ -0,167 & -0,148 & 0,088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$

Tratando-se adequadamente as equações acima, consegue-se acompanhar os vários passos do processo de Cross, mostrando-se ainda que o algoritmo das aproximações sucessivas é uma forma simples de resolver o sistema de equações, quando as incógnitas são apenas deslocamentos angulares.

Observa-se inicialmente que resolver pelo processo de Cross o pórtico tornado indeslocável externamente e solicitado apenas pelo carregamento externo é equivalente a encontrar a solução compatível, que satisfaz as equações de equilíbrio reduzidas com $D_3 = 0$, caracterizada pela solução do sistema de equações:

(3.3) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118 \\ 118 \\ -36 \end{bmatrix} + EJ_0 \begin{bmatrix} 2,539 & 0,936 & -0,167 \\ 0,936 & 2,762 & -0,148 \\ -0,167 & -0,148 & 0,088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1' \\ D_2' \\ 0 \end{bmatrix}$

ou seja, por

(3.4) $D_1' = 71,108/EJ_0$
 $D_2' = -66,820/EJ_0$
 $A_3' = -37,986$

da qual resulta a seguinte distribuição de momentos fletores:

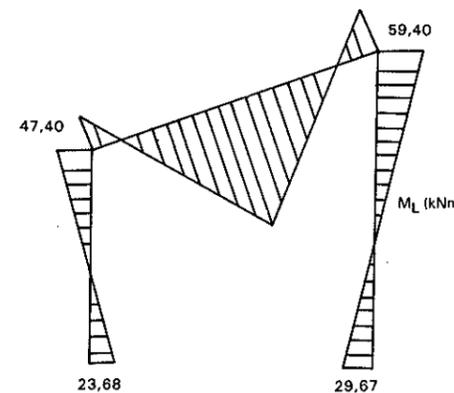


Figura 7

Os valores encontrados para D_1' , D_2' e A_3' são aproximados, respectivamente, no processo de Cross, por:

TABELA 1

	1.ª ap.	2.ª ap.	3.ª ap.	4.ª ap.	5.ª ap.
$EJ_0 \Phi_{B_L}$	62,23	70,00	70,97	71,09	71,11
$EJ_0 \Phi_{C_L}$	-42,72	-63,80	-66,43	-66,76	-66,80
H_{C_L}	-36,00	-40,06	-38,24	-38,01	-37,98

Da mesma forma, resolver pelo processo de Cross o pórtico tornado indeslocável externamente e solicitado apenas por recalque de apoio $EJ_0 \delta_1 = 10000 \text{ kNcm}$ é equivalente a encontrar a solução compatível, que satisfaz as equações reduzidas de equilíbrio com $D_3 = 100/EJ_0$ e $A_{iL} = 0$, caracterizada pela solução do sistema de equações:

(3.5) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = EJ_0 \begin{bmatrix} 2,539 & 0,936 & -0,167 \\ 0,936 & 2,762 & -0,148 \\ -0,167 & -0,148 & 0,088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1'' \\ D_2'' \\ 100/EJ_0 \end{bmatrix}$

ou seja, por

(3.6) $D_1'' = 5,259/EJ_0$
 $D_2'' = 3,576/EJ_0$
 $A_3'' = 7,392$

da qual resulta a seguinte distribuição de momentos fletores:

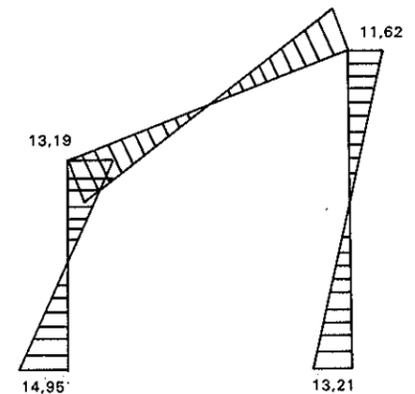


Figura 8

Os valores encontrados para D_1'' , D_2'' e A_3'' são aproximados, respectivamente, no processo de Cross, por:

TABELA 2

	1.ª ap.	2.ª ap.	3.ª ap.	4.ª ap.
$EJ_0 \Phi_{B_1}$	6,56	5,41	5,26	5,24
$EJ_0 \Phi_{C_1}$	3,14	3,53	3,58	3,59
H_{C_1}	8,85	7,29	7,42	7,44

Uma vez obtidas as duas soluções compatíveis que satisfazem as equações de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos angulares, considera-se então o subconjunto de todas as soluções compatíveis que contêm a solução também equilibrada e solução do problema, superpondo a solução compatível correspondente ao carregamento externo com a solução compatível correspondente ao recalque δ_1 de apoio ponderada de α . Observa-se então que encontrar a solução do problema se reduz a encontrar, no subconjunto referido, a solução compatível que satisfaça a equação de equilíbrio correspondente ao deslocamento linear:

$$(3.7) \quad A_3 = A_{3L} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3$$

ou

$$(3.8) \quad A'_3 + \alpha A''_3 = (A'_{3L} + \alpha A''_{3L}) + K_{31}(D'_1 + \alpha D''_1) + K_{32}(D'_2 + \alpha D''_2) + K_{33}(D'_3 + \alpha D''_3)$$

ou

$$(3.9) \quad 0 = -37,986 + \alpha 7,392$$

o que é equivalente a determinar o valor de α .

Resolvida então a equação de equilíbrio, da qual resulta $\alpha = 5,139$, obtém-se, por superposição, a solução compatível e equilibrada, que é a solução exata do pórtico, caracterizada pelos deslocamentos:

$$\begin{aligned} D_1 &= 98,15/EJ_0 \\ D_2 &= -48,42/EJ_0 \\ D_3 &= 514,02/EJ_0 \end{aligned}$$

e pelo diagrama de momentos fletores da Figura 9.

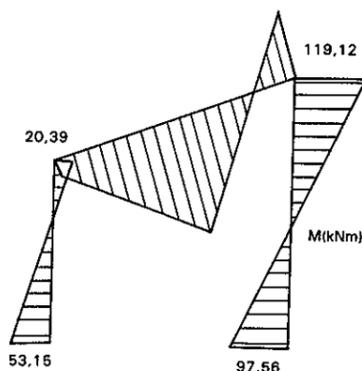


Figura 9

que é praticamente o mesmo diagrama da Figura 5.

Fica, pois, evidente, através do exemplo simples apresentado, que o processo de Cross é derivado do método dos deslocamentos. Trata-se de um procedimento extremamente engenhoso para fugir da resolução direta dos sistemas de equações de equilíbrio, envolvendo como incógnitas deslocamentos lineares e angulares, que se reduzem a sistemas de equações de equilíbrio de menor ordem, envolvendo como incógnitas apenas deslocamentos angulares (quando a resolução do sistema é feita iterativamente, de modo não explícito, através do algoritmo de aproximações sucessivas) e apenas deslocamentos lineares (quando a resolução do sistema é feita explicitamente).

4 O ALGORITMO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS DO PROCESSO DE CROSS E A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

É conveniente ainda mostrar que o algoritmo das aproximações sucessivas consiste apenas de uma rotina numérica, sugerida por interpretação física, para manipular os dados do problema sem ter que resolver explicitamente as equações de equilíbrio (tendo como incógnitas apenas deslocamentos angulares) que conectam esses dados à solução.

Os dados manipulados são os momentos fletores que as extremidades das barras aplicam aos nós e, como já se mostrou anteriormente, eles definem, de forma unívoca, as incógnitas do sistema de equações que são os deslocamentos angulares.

Do ponto de vista matemático, o algoritmo das aproximações sucessivas é equivalente ao método de Gauss-Seidel, com iteração por passos parciais. Para ficar clara tal equivalência, considere-se o algoritmo das aproximações sucessivas da Figura 3, que corresponde às equações de equilíbrio (3.3):

$$EJ_0 \begin{bmatrix} 2,539 & 0,936 \\ 0,936 & 2,762 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118 \\ -118 \end{bmatrix}$$

A iteração de ordem $r + 1$ é definida, no método de Gauss-Seidel, com iterações por passos parciais, por:

$$EJ_0 D_2^{r+1} = \frac{-118 - 0,936 D_1^r}{2,762}$$

$$EJ_0 D_1^{r+1} = \frac{118 - 0,936 D_2^{r+1}}{2,539}$$

o que permite estabelecer

TABELA 3

r	1	2	3	4	5	6	7
$EJ_0 D_1^{r+1}$	62,225	69,998	70,970	71,091	71,106	71,108	81,108
$EJ_0 D_2^{r+1}$	-42,723	-63,810	-66,444	-66,773	-66,814	-66,819	-66,820

enquanto os valores obtidos pelo algoritmo de aproximações sucessivas são:

TABELA 4

r	1	2	3	4	5
$EJ_0 \phi_B$	62,23	70,00	70,97	71,09	71,11
$EJ_0 \phi_C$	-42,72	-63,80	-66,43	-66,76	-66,80

Assim, a menos de pequenas diferenças numéricas nos valores das aproximações dos deslocamentos angulares, decorrentes de truncamentos numéricos na transmissão dos momentos de um nó para outro, pode-se constatar a equivalência referida.

5 OBSERVAÇÕES FINAIS

Procurou-se, neste trabalho, estabelecer uma ligação clara entre o processo de Cross e o método dos deslocamentos.

Inicialmente mostrou-se que o processo de Cross é derivado do método dos deslocamentos,

tratando-se apenas de uma rotina engenhosa de resolver as equações de equilíbrio, adequada para o cálculo manual por evitar a resolução direta do sistema de equações de equilíbrio.

Mostrou-se em seguida, que o algoritmo das aproximações sucessivas corresponde ao método de Gauss-Seidel com iteração por passos parciais, conveniente para cálculos manuais, por permitir a determinação direta dos momentos fletores que as extremidades das barras aplicam nos nós sem necessidade de resolver explicitamente as equações correspondentes de equilíbrio.

Espera-se que este trabalho sirva para definir claramente a ligação entre o processo de Cross e o método dos deslocamentos, permitindo assim que o processo de Cross tenha seus resultados mais bem explorados e evitando que sejam vistos como dois procedimentos distintos e distantes, que a sua utilização sem base conceitual possa sugerir.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CROSS, H. "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments" — Transactions, ASCE, Vol. 96, 1932.
 CRANDALL, S. H. "Engineering Analysis — A Survey of Numerical Procedures" — McGraw-Hill, 1956.
 SILVA JR., J. F. "Método de Cross" — Ed. McGraw-Hill do Brasil, 1975.
 SOUZA LIMA, V. M. "Notas de Aula", EPUSP.
 ANDRÉ, J. C. "Notas de Aula", EPUSP.