

CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO DO CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

A CONTRIBUTION TO THE TEACHING OF THE VON MISES YIELD CRITERION

André Luiz de Moraes Costa¹

DOI: 10.37702/REE2236-0158.v41p433-445.2022

RESUMO

Na Engenharia Mecânica, o critério de von Mises para o início de escoamento dos metais é um tópico chave nas áreas de projetos mecânicos e conformação mecânica. Em geral, o ensino deste tópico na graduação utiliza a abordagem da máxima energia de distorção elástica, que não decorre diretamente do estudo prévio das tensões de cisalhamento principais. Neste trabalho é mostrado que a equação do critério de von Mises pode ser deduzida através de abordagens que consideram conjuntos específicos de planos de cisalhamento ativados na deformação, e que a tensão equivalente de von Mises é a média quadrática das tensões de cisalhamento principais. Assim, é proposto um novo postulado para o critério de escoamento de von Mises, de maneira que este critério é diretamente deduzido a partir do estudo das tensões de cisalhamento principais e, desta forma, relaciona-se didaticamente ao critério de escoamento de Tresca (critério da máxima tensão de cisalhamento). Acredita-se que esta abordagem é mais intuitiva e deve facilitar a compreensão do estudante sobre o assunto.

Palavras-chave: critério de von Mises; tensões de cisalhamento principais; Ensino de Engenharia; Mecânica dos Materiais.

ABSTRACT

In mechanical engineering, the von Mises yield criterium is a key topic in mechanical design and metal forming analysis. In general, this topic is taught at undergraduation courses using the maximum elastic distortion energy approach, which does not follow directly from the previous study of the principal shear stresses. In the present work, it is shown that the von Mises equation can be derived by using approaches that consider specific shear plans sliding during deformation, and also that the equivalent von Mises stress is the root mean square of the principal shear stresses. Thus, it is presented a new statement for the von Mises yield criterion so that it is directly obtained from the root-mean-square of the principal shear stresses. This procedure connects didactically von Mises criterion to Tresca criterion (of maximum shear stress). It is believed this approach is more intuitive and it may help the student's learning on this important issue.

Keywords: von Mises yielding criterion, principal shear stresses, engineering teaching, mechanics of materials.

¹ Professor, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Sergipe; andre.costa@ufs.br

INTRODUÇÃO

A maior parte dos componentes mecânicos e estruturais são feitos de ligas metálicas dúcteis, especialmente aços e ligas de alumínio. No contexto da resistência dos materiais e projeto mecânico, um componente sob ação de forças externas só deve deformar elasticamente; a transição do regime de deformação elástica para o regime de deformação plástica é uma falha mecânica que diminui a eficiência do sistema, podendo causar sérios acidentes com danos materiais e até perdas humanas. Por outro lado, a fabricação destes componentes a partir de formas simples como blocos e barras ocorre através da deformação plástica. Ou seja, a determinação do ponto de transição entre os regimes de deformação elástica e plástica é importante tanto do ponto de vista do projeto mecânico quanto da fabricação mecânica. Para os metais, a deformação plástica é um fenômeno associado ao deslizamento de planos atômicos (através da movimentação de discordâncias), comumente chamado de escoamento. Dessa forma, para o dimensionamento de componentes mecânicos ou determinação da carga necessária para a conformação mecânica, é fundamental aplicar um critério teórico para ocorrência de escoamento sob um dado estado de tensões aplicadas sobre o material (NORTON, 2013; BUDYNAS, NISBETT, 2011; RODRIGUES, MARTINS, 2010).

Nos cursos de graduação em Engenharia Mecânica, o ensino dos critérios de escoamento é um tópico obrigatório em disciplinas como Mecânica dos Materiais, Resistência dos Materiais, Mecânica dos Sólidos e Teoria e Análise de Falhas, bem como tem aplicações diretas nas disciplinas Elementos de Máquinas, Projeto Mecânico, Conformação Mecânica e Análise de Tensões. Os dois critérios de escoamento sob cargas estáticas aplicados para metais dúcteis e isotrópicos estudados na graduação em engenharia são o critério da máxima tensão de cisalhamento, conhecido como critério de escoamento de Tresca, e o critério da máxima energia de distorção, conhecido como critério de escoamento de von Mises (BEER et al., 2015). Na Engenharia Mecânica, o critério de von Mises é o mais

amplamente utilizado por dois motivos: fornece resultados mais próximos dos dados experimentais e é muito mais simples de ser manipulado matematicamente, tanto no projeto mecânico (para previsão de escoamento sob cargas combinadas estáticas ou acoplado aos critérios de falha por fadiga), quanto na conformação mecânica (tensão efetiva acoplada à relação tensão-deformação no regime plástico) (NORTON, 2013; RODRIGUES, MARTINS, 2010).

A interpretação física do critério de von Mises baseada na energia de distorção elástica foi desenvolvida principalmente por Maksymilian Hubner e Heinrich Hencky (JONES, 2009; OSAKADA, 2010), e atualmente é predominante na comunidade científica da área, sendo atualmente a explicação encontrada nos livros didáticos da graduação (BEER et al., 2015; HIBELLER, 2010; NORTON, 2013; BUDYNAS, NISBETT, 2011). Entretanto, essa abordagem não é intuitiva e os alunos têm dificuldade de entender o significado físico do critério de von Mises.

Apesar da importância do tópico, o autor não encontrou nenhuma discussão na literatura sobre abordagens didáticas ou alternativas para a dedução do critério de von Mises. O presente trabalho tem o objetivo de auxiliar professores na apresentação e explicação do critério de von Mises em disciplinas da graduação como Mecânica dos Materiais. Para isso, é desenvolvido um novo postulado baseado na ideia mais intuitiva da deformação plástica ocorrer nos planos das tensões de cisalhamento principais. Além disso, é apresentado um roteiro para o ensino do assunto.

REVISÃO DA LITERATURA

Após vários anos lecionando este tópico para turmas de Engenharia Mecânica e Engenharia de Materiais, o autor concluiu que as dificuldades dos alunos no entendimento do critério de von Mises poderiam ser minimizadas se for seguida uma conexão lógica entre o critério de Tresca e o critério de von Mises, ou seja, se este último fosse também explicado a partir das tensões de cisalhamento principais atuantes ao invés da energia de

distorção elástica, um conceito que normalmente parece mais abstrato ao estudante².

O autor fez uma revisão da literatura e encontrou que, além da ideia da máxima energia de distorção elástica, existem pelo menos outras cinco abordagens teóricas e interpretações físicas para o critério de escoamento de von Mises: abordagem geométrica de Richard von Mises (1913) baseada no conceito de superfície limite de deformação; abordagem da tensão de cisalhamento média atuante em todos os planos do sólido de George Sines (1969); abordagem da máxima tensão de cisalhamento média atuante nos planos octaédricos de Arpad Nádai (JONES, 2009); abordagem matemática através do invariante do tensor de tensões desviatório (DIETER, 1981; RODRIGUES, MARTINS, 2010); e a abordagem matemática através de expansão em série de Taylor de uma função desconhecida (XIANG et al, 2007).

Todas as abordagens teóricas citadas estão de alguma forma relacionadas, mas, para os objetivos didáticos propostos neste artigo, são de interesse a dedução original do critério realizada por von Mises, a abordagem de Sines e a abordagem de Nádai, pois essas três abordagens se utilizam da ideia de que a deformação ocorre pelas tensões de cisalhamento atuando em um conjunto de planos específicos do material. Ao longo deste trabalho, essas abordagens serão descritas e relacionadas para demonstrar o novo postulado para o critério de von Mises.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

A chave para a compreensão dos critérios de escoamento de Tresca e von Mises é entender o conceito de Tensão de Cisalhamento Principal. Nesta etapa da disciplina, o estudante deve estar bem familiarizado com os conceitos de tensão normal, tensão de cisalhamento, tensão em plano oblíquo, estado geral de tensões e estados equivalentes de tensão. A seguir, vamos brevemente mostrar os tópicos

que o professor deve enfatizar para facilitar o entendimento dos critérios de escoamento.

Um ponto infinitesimal qualquer Q de um sólido submetido a forças externas está sujeito a um estado geral de tensões com nove componentes: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, calculadas em função de um sistema de eixos x, y, z definido arbitrariamente. Essas componentes atuam nas faces do cubo que representa o ponto Q como mostrado na Figura 1. Existem infinitos sistemas de eixo e, portanto, infinitos estados de tensão equivalentes. Em um desses estados de tensão (com sistema de eixos a, b, c), as tensões cisalhantes são nulas e apenas tensões normais são atuantes, ver Figura 1. Essas tensões normais são chamadas tensões normais principais $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ e as faces do cubo são os planos principais. Depois de calculadas, as tensões $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ são ordenadas da maior para a menor como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Considere agora um plano qualquer no interior do sólido formando um ângulo θ com o plano principal bc como mostrado na Figura 2. As forças na direção a e b (que causam as tensões normais σ_a e σ_b nos planos principais bc e ac) provocam tensões normais $\sigma_a^\theta, \sigma_b^\theta$ e tensões de cisalhamento $\tau_a^\theta, \tau_b^\theta$ no plano θ .

As tensões de cisalhamento são calculadas de acordo com a relação³:

$$\tau_a^\theta = \sigma_a \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

$$\tau_b^\theta = \sigma_b \sin(90^\circ - \theta) \cos(90^\circ - \theta) \quad (2)$$

Os maiores valores de tensão de cisalhamento estarão, portanto, no plano a 45° dos planos principais:

$$\tau_a^{max} = \sigma_a \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sigma_a}{2} \quad (3)$$

$$\tau_b^{max} = \sigma_b \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sigma_b}{2} \quad (4)$$

A tensão de cisalhamento máxima total no plano vale:

$$\tau_{ab} = |\tau_a^{max} - \tau_b^{max}| = \frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} \quad (5)$$

² Acrescenta-se ainda o fato de que, normalmente, o conceito de energia de deformação só é introduzido no capítulo final dos livros de Mecânica dos Materiais.

³ Para mais detalhes: ver Beer et al. (2015).

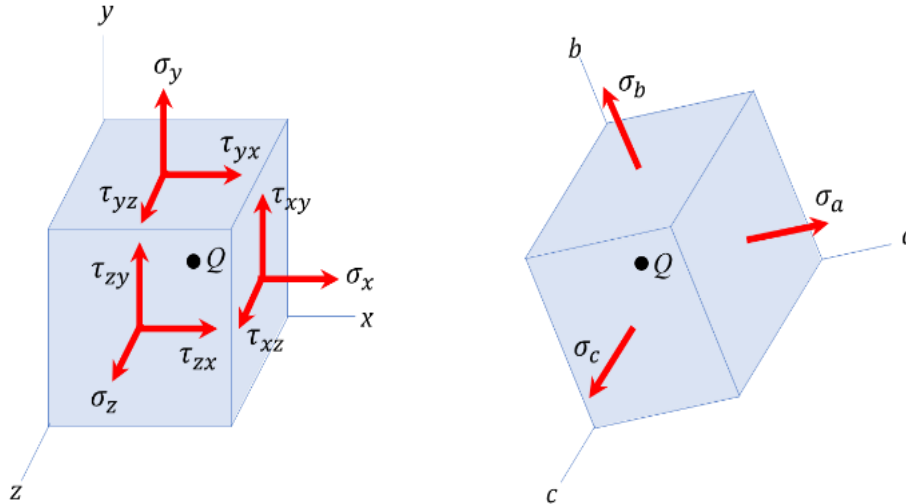
Similarmente, para os planos oblíquos aos outros planos principais tem-se:

$$\tau_{ac} = \frac{\sigma_a - \sigma_c}{2} \quad (6)$$

$$\tau_{bc} = \frac{\sigma_b - \sigma_c}{2} \quad (7)$$

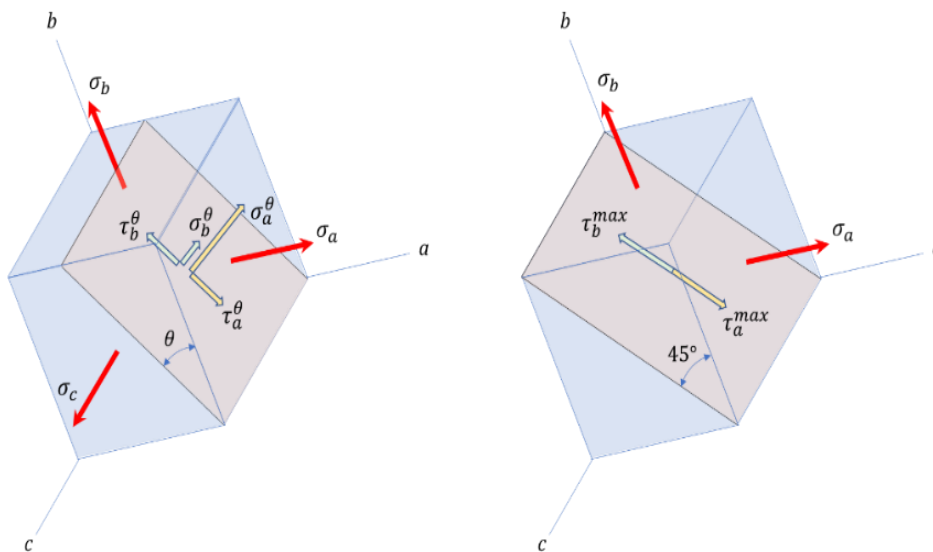
A Figura 3 mostra todos os planos das tensões de cisalhamento principais. Note que o plano $\theta + 90^\circ$ é geometricamente equivalente ao plano θ .

Figura 1 – Tensões em um ponto Q : Estado Geral para um sistema arbitrário qualquer x,y,z (esquerda) e Estado de Tensões Principais que está em um sistema de eixos a,b,c (direita)

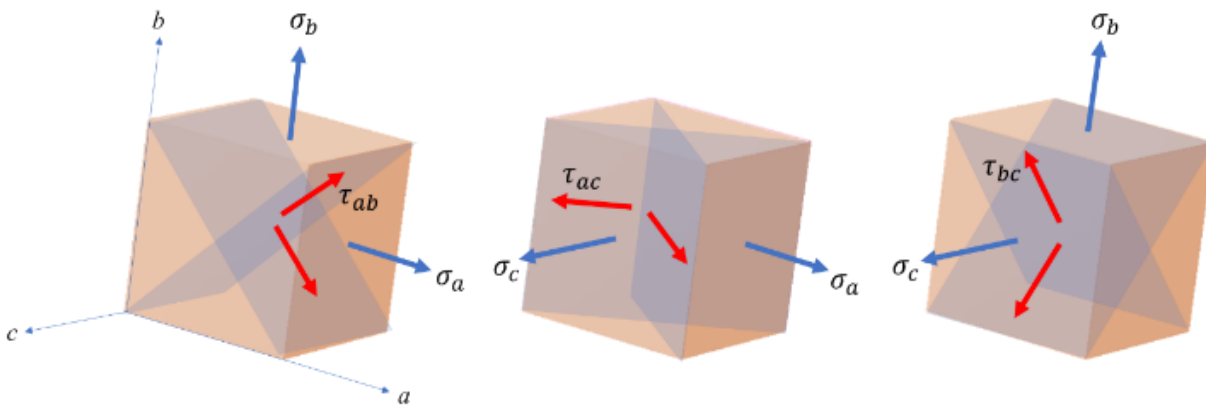


Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 2 – Tensões de cisalhamento $\tau_a^\theta, \tau_b^\theta$ em um plano oblíquo θ (esquerda) e Tensões de cisalhamento máximas $\tau_a^{max}, \tau_b^{max}$ quando $\theta = 45^\circ$ (direita)



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 3 – Planos das tensões de cisalhamento principais máximas $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$ 

Fonte: elaborada pelo autor.

O leitor atento deve ter observado que nos livros de graduação em engenharia, a obtenção das tensões normais principais é feita através de geometria e apenas para o estado plano de tensões, ou seja, para o caso em que $\sigma_c = 0$. Entretanto, este procedimento torna difícil para o estudante posteriormente visualizar as tensões máximas de cisalhamento τ_{ac} e τ_{bc} que ocorrem fora do estado plano. A solução ideal para esse “problema didático” seria deduzir as tensões normais principais usando geometria para o caso tridimensional geral (mais complicado) ou através do cálculo matricial e o conceito dos invariantes do tensor de tensões (ver, por exemplo, Dieter [1981] e Rodrigues e Martins [2015]). Entretanto, a solução proposta aqui é explicar para o aluno *que o estado de tensões principais deve necessariamente existir*, uma vez que as componentes do estado de tensões dependem apenas da escolha arbitrária do sistema de eixos e deixar claro que o estado de tensões principais é sempre tridimensional (Figura 1). Aí, depois, pode-se seguir para o *caso particular* do estado plano de tensões, calculando-se sempre as três tensões σ_a, σ_b e σ_c . O fato que σ_c (mesmo sendo eventualmente igual a zero) deve sempre ser levada em conta é o ponto importante para o entendimento dos critérios de escoamento.

Como $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ são ordenadas da maior para a menor como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; as tensões de cisalhamento $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$ são também eventualmente nomeadas como $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$, sendo que a máxima tensão de cisalhamento principal é:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (8)$$

Crítério de Tresca

Segundo Osakada (2010), em 1864, Henry E. Tresca publicou vários estudos sobre o escoamento plástico com a hipótese que a tensão de cisalhamento do material era que determinava a resistência à deformação plástica. Barré de Saint-Venant leu os artigos de Tresca e, em 1871, publicou um trabalho analítico no qual afirmava que “a tensão de cisalhamento máxima em cada ponto deve ser igual a uma constante específica do material na região plástica”, estabelecendo a base teórica para um critério de escoamento. Em 1882, Otto Mohr apresentou uma representação gráfica do estado de tensão em um ponto, usando as tensões normal σ e de cisalhamento τ como coordenadas, e criou a teoria do limite de fratura e da condição de escoamento. Em 1900, James Guest publicou estudos sobre a resistência dos materiais dúcteis sob estados planos de tensão gerados por carregamento combinado. Ele apresentou os resultados num gráfico usado até os dias atuais, tendo como coordenadas as tensões principais σ_a e σ_b , e também concluiu que o escoamento ocorre quando a máxima tensão de cisalhamento atinge um valor crítico. Note que o critério de Tresca poderia ser mais adequadamente chamado de critério de Tresca-Saint Venant-Mohr-Guest.

De acordo com Kachanov (2004), no caso tridimensional, a forma final do critério de Tresca estabelece que o escoamento vai ocorrer se o valor absoluto das tensões de cisalhamento principais for igual ou maior que um valor crítico τ' :

$$\begin{aligned} |\tau_{ab}| &\geq \tau' \\ |\tau_{ac}| &\geq \tau' \\ |\tau_{bc}| &\geq \tau' \end{aligned} \quad (9)$$

Escrevendo a Equação (9) em função das tensões normais principais, tem-se para τ_{ab} :

$$\frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2} \geq \tau' \quad (10)$$

O valor de τ' é obtido considerando o ensaio de tração uniaxial em que $\sigma_a = Y$ e $\sigma_b = \sigma_c = 0$, sendo Y a tensão de escoamento do material. Assim:

$$\frac{|Y-0|}{2} = \frac{Y}{2} = \tau' \quad (11)$$

Substituindo τ' da Equação (11) na Equação (10), e generalizando para as três tensões de cisalhamento principais, tem-se:

$$\begin{aligned} |\sigma_a - \sigma_b| &\geq Y \\ |\sigma_a - \sigma_c| &\geq Y \\ |\sigma_b - \sigma_c| &\geq Y \end{aligned} \quad (12)$$

Se qualquer uma das desigualdades na Equação (12) for satisfeita, o escoamento vai ocorrer no plano da tensão máxima correspondente. No sistema de coordenadas das tensões de cisalhamento principais $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$, Eq. (9), a superfície limite de elasticidade do critério de Tresca é um cubo, enquanto no sistema de coordenadas das tensões normais principais $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$, Equação (12), a superfície limite de elasticidade é um prisma hexagonal de comprimento infinito (ver Figura 4).

É importante observar que, pelo critério de Tresca, o escoamento vai ocorrer no plano da maior tensão de cisalhamento τ_{13} , a qual pode ser τ_{ab}, τ_{ac} ou τ_{bc} . Isto é, apenas a combinação das tensões normais principais máxima σ_1 e mínima σ_3 deve provocar o escoamento; em outras palavras, o critério de Tresca não

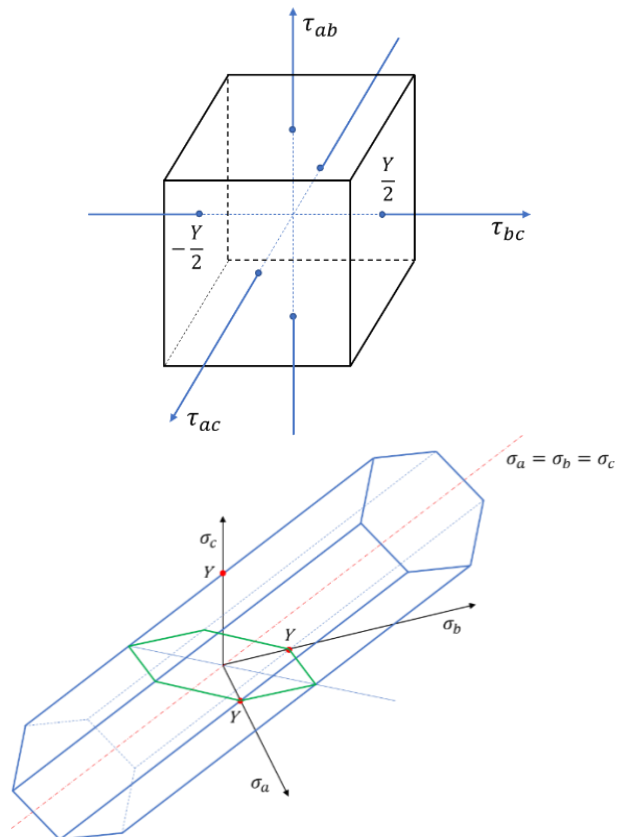
considera a possível influência da tensão normal principal intermediária σ_2 .

Outro ponto importante é que no ensaio de torção, em que k é a tensão de cisalhamento puro, tem-se $\sigma_1 = k$, $\sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = -k$, e a Equação (12) resulta em:

$$|k - (-k)| = Y \quad (13)$$

$$k = \frac{Y}{2} \quad (14)$$

Figura 4 – Superfície limite de elasticidade do critério de escoamento de Tresca: no espaço das tensões de cisalhamento principais (acima) e no espaço das tensões normais principais (abaixo)



Fonte: elaborada pelo autor.

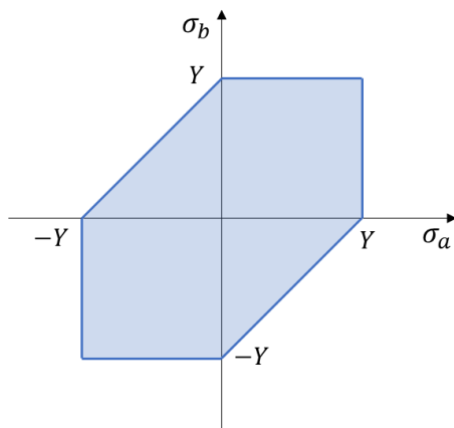
Em razão de que a maioria dos componentes mecânicos simples estão sujeitos a um Estado Plano de Tensão, os livros de graduação costumam abordar apenas este caso específico, considerando a tensão normal principal $\sigma_c = 0$. Nesse caso, três resultados são possíveis para a Equação (12):

- Se as tensões principais σ_a e σ_b forem positivas, tem-se: $\sigma_1 = \sigma_a$, $\sigma_2 = \sigma_b$, $\sigma_3 = 0$, resultando em $|\sigma_a| \geq Y$;

- Se as tensões principais σ_a e σ_b forem negativas, tem-se: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_a$, $\sigma_3 = \sigma_b$, resultando em $|\sigma_b| \geq Y$;
- Se as tensões principais σ_a e σ_b tiverem sinais contrários, tem-se $\sigma_1 = \sigma_a$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_b$, resultando em $|\sigma_a - \sigma_b| \geq Y$.

A representação gráfica do critério de Tresca para o Estado Plano de Tensão segue a ideia original de James Guest, com a fronteira da região elástica sendo um hexágono irregular como mostrado na Figura 5 (também visualizado em verde na Figura 4). Qualquer estado de tensões na fronteira ou fora do hexágono vai provocar o escoamento do material.

Figura 5 – Hexágono de Tresca como fronteira de escoamento para o Estado Plano de Tensão



Fonte: elaborada pelo autor.

ABORDAGENS TEÓRICAS PARA O CRITÉRIO DE VON MISES

A seguir serão analisadas as abordagens de von Mises, Sines e Nádai para a dedução do critério de von Mises.

Abordagem de von Mises

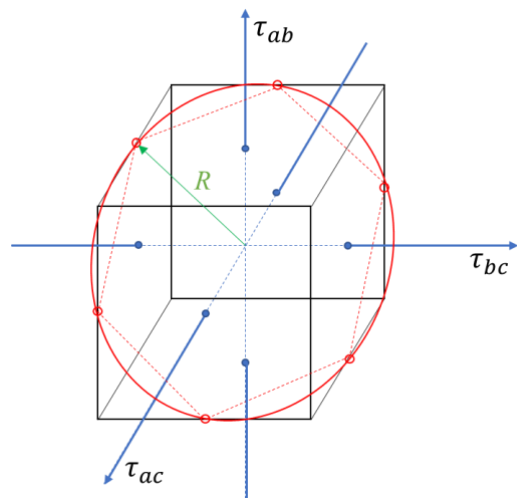
Richard von Mises (1913) desenvolveu seu critério de escoamento a partir da superfície limite de escoamento do critério de Tresca no sistema de coordenadas das tensões de cisalhamento principais $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$. Von Mises inicialmente observou que o escoamento havia sido determinado experimentalmente apenas para estados de tensão em que uma das tensões de cisalhamento é zero e o valor

absoluto das outras duas é igual a $\frac{Y}{2}$, que são os pontos vermelhos na Figura 6.

Tomando as faces do cubo como limites para o escoamento de Tresca, a ligação entre esses pontos forma um hexágono regular. De acordo com von Mises (1913): “a conexão direta surge da suposição de que (isso) é devido (apenas) à maior tensão de cisalhamento, isto é, as tensões de cisalhamento principais menores são irrelevantes. Essa suposição não parece tão plausível que não se deva tentar substituir o hexágono por uma estrutura mais simples, nomeadamente um círculo circunscrito” (VON MISES, 1913). Então, se o hexágono é uma solução a partir da hipótese que a superfície limite de escoamento é um cubo, o círculo decorre da hipótese que a superfície limite de escoamento é uma esfera dada pela equação:

$$\tau_{ab}^2 + \tau_{ac}^2 + \tau_{bc}^2 = R^2 \quad (15)$$

Figura 6 – Modelo geométrico usado por R. von Mises na dedução do seu critério de escoamento



Fonte: elaborada pelo autor.

Sendo $R^2 = 2 \left(\frac{Y}{2}\right)^2$, e substituindo as tensões de cisalhamento principais pelas tensões normais principais dadas pelas Equações (5), (6) e (7), a Equação (15) é reescrita como:

$$\left(\frac{|\sigma_a - \sigma_b|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|\sigma_a - \sigma_c|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|\sigma_b - \sigma_c|}{2}\right)^2 = 2 \left(\frac{Y}{2}\right)^2 \quad (16)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = Y \quad (17)$$

O lado esquerdo da Equação (17) é a tensão equivalente de von Mises, σ_{VM} . O critério de von Mises estabelece que o escoamento vai ocorrer se:

$$\sigma_{VM} \geq Y \quad (18)$$

No espaço das tensões normais principais, a superfície limite de escoamento é um cilindro de raio igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}Y$ e comprimento infinito (circunscrito na superfície de Tresca), como mostrado na Figura 7.

Considerando agora a condição de cisalhamento puro no ensaio de torção: $\sigma_1 = k$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -k$, a Equação (17) torna-se:

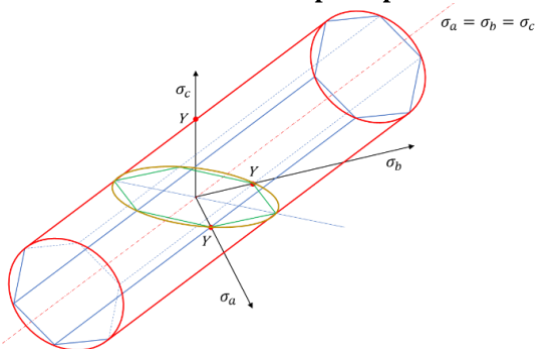
$$\frac{1}{2} [(k)^2 + (2k)^2 + (k)^2] = Y^2 \quad (19)$$

$$3k^2 = Y^2 \quad (20)$$

$$k = \frac{Y}{\sqrt{3}} = 0,577Y \quad (21)$$

Esse resultado é muito importante, pois metais dúcteis apresentam valores experimentais de k entre $0,55Y$ e $0,60Y$ (BEER et al., 2015, HIBELLER, 2010; NORTON, 2013; BUDYNAS, NISBETT, 2011), indicando que o critério von Mises é mais representativo da natureza do fenômeno do escoamento desses materiais do que o critério de Tresca.

Figura 7 – Superfície limite de elasticidade do critério de escoamento de von Mises no espaço das tensões normais principais



Fonte: elaborada pelo autor.

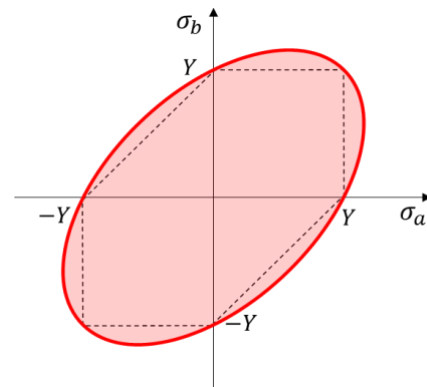
No caso do Estado Plano de Tensões, $\sigma_c = 0$, e a Equação (17) se reduz a:

$$\sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2} = Y \quad (22)$$

e a fronteira limite de escoamento é então uma elipse circunscrita ao hexágono de Tresca, como mostrado na Figura 8 (também visualizada em amarelo na Figura 7)

Diferentemente do critério de Tresca, no critério de von Mises o escoamento depende da combinação das três tensões de cisalhamento principais, Equação (15), ou como visto pela Equação (17): a tensão normal principal secundária σ_2 também contribui para o escoamento. Além disso, a Equação (17) é matematicamente muito mais simples de manipular quando comparada com a Equação (12). Seguindo a dedução original de R. von Mises, torna-se evidente que o critério de von Mises está diretamente relacionado ao critério de Tresca, o que não é evidenciado quando se explica o assunto pela abordagem da energia de distorção.

Figura 8 – Elipse como a fronteira de escoamento do critério de von Mises para o Estado Plano de Tensão



Fonte: elaborado pelo autor.

Abordagem de Sines

Uma vez que o escoamento em materiais policristalinos é um fenômeno que envolve a movimentação simultânea de diversos planos atômicos em cada grão, George Sines (1969) inferiu que o escoamento deve ocorrer quando a média quadrática (*root mean square – RMS*) das tensões de cisalhamento atuantes em todos os planos atingir um valor crítico τ' . Todos os planos possíveis são obtidos imaginando-se uma esfera de área superficial Ω coberta por n planos de área infinitesimal $\Delta\Omega$. Então:

$$\tau'^2 = \frac{\sum_1^n \tau_i^2}{n} = \frac{\sum_1^n \tau_i^2 \Delta\Omega}{\sum_1^n \Delta\Omega} = \iint_{\Omega} \frac{\tau_i^2 d\Omega}{\Omega} \quad (23)$$

Inserindo τ_i^2 como uma função das tensões principais em coordenadas cilíndricas, a integração leva à seguinte expressão:

$$\sqrt{\frac{1}{15}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = \tau' \quad (24)$$

O valor crítico τ' pode ser obtido considerando-se o caso do ensaio de tração uniaxial em que $\sigma_a = Y, \sigma_b = \sigma_c = 0$:

$$\sqrt{\frac{1}{15}[2(Y)^2]} = \tau' \quad (25)$$

A Equação (24) se torna, então:

$$\sqrt{\frac{1}{15}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = \sqrt{\frac{1}{15}[2(Y)^2]} \quad (26)$$

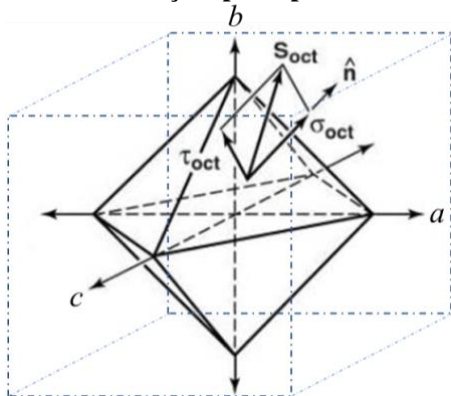
que é exatamente igual à Equação (17):

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = Y \quad (27)$$

Abordagem de Nádai

Os planos octaédricos são planos cujas direções normais formam ângulos iguais ($54,73^\circ$) com cada uma das direções das tensões principais. Os planos formam um octaédrico regular como mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Planos octaédricos no espaço das direções principais



Fonte: adaptada de Jones (2009).

Arpad Nádai observou que, nos planos octaédricos, a componente normal σ_{oct} da tensão atuante é igual à tensão hidrostática, ou seja, a tensão de cisalhamento atuante no plano octaédrico τ_{oct} é igual ao estado de tensões responsável pela mudança de forma (JONES, 2009; DIETER, 1981). Como todos os planos octaédricos são equivalentes, a média das tensões de cisalhamento atuantes é igual à tensão de cisalhamento em um único plano:

$$\tau'^2 = \frac{\sum_1^n \tau_i^2}{n} = \frac{\sum_1^n \tau_{oct}^2}{n} = \tau_{oct}^2 \quad (28)$$

A dedução geométrica da tensão octaédrica τ_{oct} leva a⁴:

$$\sqrt{\frac{1}{9}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = \tau' \quad (29)$$

O valor crítico τ' pode ser obtido considerando-se novamente o caso do ensaio de tração uniaxial em que $\sigma_a = Y, \sigma_b = \sigma_c = 0$:

$$\sqrt{\frac{1}{9}[2(Y)^2]} = \tau' \quad (30)$$

A Equação (29) se torna, então:

$$\sqrt{\frac{1}{9}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = \sqrt{\frac{1}{9}[2(Y)^2]} \quad (31)$$

que é também exatamente igual à Equação (17):

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} = Y \quad (32)$$

Relação entre as abordagens de von Mises, Sines e Nádai

As discussões acima levam à conclusão de que as abordagens de Sines e Nádai são variações da abordagem geométrica de von Mises, que, por sua vez, é uma extensão da ideia fundamental de Tresca e Saint-Venant de que o escoamento ocorre quando a tensão de cisalhamento em determinado plano atinge um

⁴ Para detalhes, consultar Jones (2009) e Dieter (1981).

valor crítico. O critério de Tresca considera que o escoamento depende apenas da máxima tensão de cisalhamento principal, enquanto o critério de von Mises considera que o escoamento depende de uma combinação das três tensões de cisalhamento principais. Sines considera que o escoamento depende da média quadrática das tensões de cisalhamento atuantes em todos os planos do sólido. Nádai considera que o escoamento depende da tensão de cisalhamento atuando nos planos octaédricos.

As formulações de Sines e Nádai encontraram o mesmo resultado obtido por von Mises, mostrando que, na prática, não importa quantos n planos de cisalhamento τ_i são efetivamente ativados durante a deformação. Em outras palavras, sendo τ_i um conjunto de planos semelhantes, tem-se que:

$$\tau'^2 = \frac{\sum_1^n \tau_i^2}{n} = \lambda [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2] \quad (33)$$

em que λ é um número real. Ademais, considerando-se o ensaio uniaxial de tração, chega-se a:

$$\tau' = Y\sqrt{2\lambda} \quad (34)$$

o que, como visto, resulta na Equação (17) da tensão equivalente de von Mises.

Pode-se argumentar que as análises de von Mises, Sines e Nádai são o mesmo que considerar a energia de distorção elástica distribuída num conjunto de n planos semelhantes. Quanto maior o número de planos a serem ativados, menor o valor da tensão média crítica a ser atingida.

UMA FORMULAÇÃO SIMPLES PARA O CRITÉRIO DE ESCOAMENTO DE VON MISES

A análise das abordagens de von Mises, Sines e Nádai para a dedução do critério de von Mises mostrou que qualquer modelo físico que considere o escoamento como uma média quadrática (*root mean square* – RMS) das

tensões de cisalhamento atuantes em planos específicos deve resultar na tensão equivalente de von Mises dada pela Equação (17).

Além disso, o estudante da Mecânica dos Materiais deve ter anteriormente aprendido em disciplinas de ciência de materiais que a *mudança na forma* de um sólido metálico ocorre devido ao deslizamento relativo entre os planos atômicos da rede cristalina, e que esse deslizamento é impulsionado pelas tensões de cisalhamento. Os planos cristalinos que irão se deslocar devem ser aqueles mais próximos da orientação dos planos das tensões de cisalhamento máximas, $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$.

Dessa forma, é proposto o seguinte postulado para o critério de escoamento de von Mises: *o escoamento deve ocorrer quando uma média quadrática das tensões de cisalhamento principais for maior ou igual a um valor crítico τ' .*

O critério de von Mises é então escrito matematicamente como:

$$\left[\frac{\tau_{ab}^2 + \tau_{ac}^2 + \tau_{bc}^2}{3} \right] \geq \tau'^2 \quad (35)$$

Substituindo as tensões de cisalhamento pelas tensões normais principais:

$$\sqrt{\frac{1}{12} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} \geq \tau' \quad (36)$$

Obtendo-se o valor de τ' para o caso do ensaio de tração uniaxial em que $\sigma_a = Y, \sigma_b = \sigma_c = 0$, tem-se:

$$\tau' = Y\sqrt{\frac{1}{6}} \quad (37)$$

inserindo na Equação (36), obtém-se a forma matemática final do critério de von Mises, equivalente às Equações (17) e (18):

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_a - \sigma_c)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2]} \geq Y \quad (38)$$

$$\sigma_{VM} \geq Y \quad (39)$$

Em termos das componentes do estado geral de tensões no sistema de eixos x, y, z , a tensão equivalente de von Mises é escrita como⁵:

⁵ A conversão da equação de von Mises do estado de tensões principais para os componentes do tensor de tensões no estado geral de tensões é mostrada por Jong e Springer (2009).

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]} \quad (40)$$

Como já observado, para o estado plano de tensões tem-se:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2} \quad (41)$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (42)$$

Recomenda-se o seguinte roteiro didático para expor os critérios de escoamento nas aulas de Mecânica dos Materiais na graduação:

(i) partir da definição das tensões de cisalhamento principais $\tau_{ab}, \tau_{ac}, \tau_{bc}$ (Equações 5 a 7 e Figura 3);

(ii) depois explicar o critério de Tresca na forma tridimensional (Equações 9 a 12);

(iii) explanar o critério de von Mises assumindo o postulado proposto (Equações 35 a 39).

CONCLUSÃO

O estudo das abordagens teóricas de von Mises, Sines e Nádai para o critério de escoamento de von Mises mostrou que elas compartilham o princípio que o escoamento deve ocorrer pela ativação de um conjunto específico de planos de cisalhamento, e que as formulações resultam numa média quadrática das tensões de cisalhamento atuantes nesses planos. A partir dessa análise, foi proposto um novo postulado para o critério de von Mises baseado na média quadrática das tensões de cisalhamento principais.

Foi mostrado que o postulado do critério de von Mises como desenvolvido neste trabalho está didaticamente conectado ao postulado do critério de escoamento de Tresca e, por isso, acredita-se que será mais facilmente entendido pelos estudantes de engenharia do que a abordagem da máxima energia de distorção elástica comumente usada nos livros didáticos de mecânica dos materiais. Para isso, recomenda-se usar o roteiro didático apresentado.

NOTA HISTÓRICA SOBRE RICHARD VON MISES

Osakada (2010) faz um breve resumo da história do critério de von Mises e da biografia de alguns dos cientistas envolvidos no seu desenvolvimento, e sua leitura é fortemente recomendada para os professores que ensinam a disciplina.

Richard Edler von Mises (Figura 10) foi um matemático e engenheiro mecânico que desenvolveu pesquisas em mecânica dos sólidos, mecânica de fluídos, aerodinâmica, estatística e teoria da probabilidade. Ele fez enormes contribuições em muitas áreas e vários teoremas matemáticos levam seu nome.

Von Mises nasceu em território do Império Austro-Húngaro, em 1883, e obteve seu doutorado com apenas 25 anos. Escreveu seu artigo sobre o critério de escoamento aos 30 anos enquanto professor na França. Serviu como piloto de testes e projetista de aviões na Primeira Guerra Mundial e depois foi nomeado professor na Universidade de Berlim. Como von Mises era judeu asquenaze, quando os nazistas chegaram ao poder em 1933 ele se mudou para a Turquia e, em 1939, ele imigrou para os Estados Unidos da América, onde assumiu um posto na Universidade Harvard. Ele morreu em Boston em 1953. Outros detalhes biográficos são descritos por O'Connor e Robertson (2000).

Uma curiosidade é que Richard von Mises era irmão mais novo de Ludwig von Mises, famoso expoente da escola austríaca de economia, com quem tinha diferenças filosóficas, especialmente sobre epistemologia (BARBIERI, 2012).

Figura 10 – Foto de Richard von Mises

Fonte: O'CONNOR; ROBERTSON, 2000.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Douglas B. Riffel pela leitura e comentários.

DEDICATÓRIA

Este artigo é dedicado à professora Rosa Morais Costa em honra ao seu 72º aniversário.

REFERÊNCIAS

- BARBIERI, F. **Os irmãos Mises: o positivismo e as ciências sociais**. 2012. Disponível em: <https://www.mises.org.br/article/1299/os-irmaos-mises-o-positivismo-e-as-ciencias-sociais>. Acesso em: 14 dez. 2021.
- BEER, F.P. et al. **Mecânica dos materiais**. Porto Alegre: AMGH, 2015.
- BUDYNAS, R.G., NISBETT, J.K. **Elementos de Máquinas de Shigley: projeto de Engenharia Mecânica**. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- DIETER, G. **Metalurgia mecânica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- JONES, R.M. **Deformation Theory of Plasticity**. Blacksburg: Bull Ridge, 2009.
- JONG, I-C., SPRINGER, W. Teaching von Mises Stress: From Principal Axes to Non-principal Axes. **Proceedings...** The Annual Conference & Exposition of the American Society for Engineering Education, Austin, Texas, June 14– 17, pp. 14.1159.1 – 14.1159.9, 2009.
- KACHANOV, L.M. **Fundamentals of the Theory of Plasticity**. Mineola: Dover, 2004.
- NORTON, R.L. **Projeto de Máquinas: uma abordagem integrada**. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. **Richard von Mises**. 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mises/>. Acesso em 14 dez. 2021.
- OSAKADA, K. History of plasticity and metal forming analysis. **Journal of Materials Processing Technology** 210: 1436–1454, 2010.
- RODRIGUES, J.M.C., MARTINS, P.A.F. **Tecnologia Mecânica – Tecnologia da Deformação Plástica – Vol. 1: Fundamentos Teóricos**. Lisboa: Escolar, 2010.
- SINES, G. **Elasticity and Strength**. Boston: Allyn and Bacon, 1969.
- VON MISES, R. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand, **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse**. 4: 582 – 592, 1913.
- XIANG, G., POWNUK, A., KOSHELEVA, O., STARKS, S.A. Von Mises Failure Criterion in Mechanics of Materials: How to Efficiently Use It Under Interval and Fuzzy Uncertainty. In: Marek Reformat and Michael R. Berthold (eds.), **Proceedings...** The 26th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS'2007, San Diego, USA, June 24-27, pp. 570-575, 2007.

DADOS BIOGRÁFICOS DOS AUTORES



André Luiz de Moraes Costa – Natural de Belém do Pará, Engenheiro Mecânico (1996) e Mestre em Engenharia Mecânica (1998) pela UFPA, e Doutor em Ciência e Engenharia de Materiais pela UFSCar (2003). Atualmente é Professor Associado da UFS, atua em ensino e pesquisa na área de materiais metálicos, processos de fabricação e projeto mecânico. Tem interesse em currículo e ensino de engenharia, foi autor dos projetos pedagógicos e coordenador dos cursos de graduação em Engenharia de Materiais da FEMAT-UFPA e Engenharia Mecânica do DMEC-UFS. Leciona as disciplinas Mecânica dos Materiais, Elementos de Máquinas, Processos de Fabricação, Ensaios Mecânicos e Conformação Mecânica.