

# PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE ENGENHARIA USANDO UM SISTEMA P-FUZZY

DOI:<http://dx.doi.org/10.15552/2236-0158/abenge.v34n1p31-42>

Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni,<sup>1</sup> Graziela Marchi Tiago<sup>2</sup>

## RESUMO

Neste trabalho, apresentamos o uso da modelagem matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), em cursos de engenharia. Mais especificamente, utilizamos uma modelagem a partir de um sistema *p-fuzzy*, que procura desenvolver os conteúdos de EDO, junto aos alunos de cursos de engenharia. Nossa intenção é criar um caminho com novos ambientes de aprendizagem, em que a participação do professor seja a de orientador das atividades e não de único detentor do conhecimento. Com base na teoria de resolução de problemas de George Polya, podemos dizer que sistemas baseados em regras *fuzzy* se diferenciam pela facilidade de compreensão, e por traduzir o pensamento humano em uma linguagem natural. Além disso, por se tratar de ensino de EDO, o sistema *fuzzy* consegue integrar, de forma natural, os conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Física à modelagem de EDO. Adicionalmente, nessa proposta, os alunos têm a liberdade de desenvolver e modelar suas próprias ideias na construção dos conhecimentos, e não são meros receptores de informação, assim como se espera, considerando as novas tendências de ensino.

**Palavras-chave:** Ensino-Aprendizagem; Equações Diferenciais Ordinárias; modelagem matemática; sistemas *p-fuzzy*.

## ABSTRACT

### ACTIVITY PROPOSAL FOR THE TEACHING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ENGINEERING COURSES USING A P-FUZZY SYSTEM

This work presents the use of mathematical modeling as a methodology of teaching and learning of Ordinary Differential Equations (ODE) in Engineering Courses. More specifically, a model is used, from a *p-fuzzy* system, which seeks to develop the contents of EDO, for students of higher education. In this proposal, you must create a path with new learning environments in which the participation of the teacher is that of guiding the activities and not the holder of knowledge. Through the George Polya problem solving theory, we can say that system based on fuzzy rules differ in the ease of understanding, and translate human thought in a natural language. Moreover, because it is teaching EDO, the fuzzy system can explain the contents of the disciplines of Differential and Integral Calculus and Physics to modeling EDO more easily. Additionally, in this proposal, students have the freedom to develop and shape ideas in the construction of knowledge, and they are not mere recipients of information, as well as expected new trends of education.

**Keywords:** Teaching-learning; Ordinary Differential Equations; mathematical modeling; *p-fuzzy* systems.

1 Professora, Doutora em Computação Aplicada, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFSP) – *campus* São Paulo; [mariana.baroni@gmail.com](mailto:mariana.baroni@gmail.com).

2 Professora, Doutora em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFSP) – *campus* São José dos Campos; [grazielamarchi@gmail.com](mailto:grazielamarchi@gmail.com).

## INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais (EDs) fazem parte do ensino de Cálculo Diferencial e Integral da maioria dos cursos de graduação da área de Ciências Exatas e Engenharias. Sendo parte de um curso universitário, podemos refletir sobre o que dizem Teodoro e Vasconcelos (2003, p. 85) quanto à aprendizagem dos alunos nesse nível de ensino:

a aprendizagem universitária pressupõe, por parte do aluno, aquisição e domínio de um conjunto de conhecimentos, métodos e técnicas científicas de forma crítica. Iniciativa para buscar informações, relacioná-las, conhecer e analisar várias teorias e autores sobre determinado assunto, compará-las, discutir suas aplicações em situações reais [...].

Esperamos que os alunos de curso universitário sejam seres críticos e reflexivos, capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos em situações-problema reais e de analisar os resultados de um ponto de vista técnico, discutindo possíveis erros de formulação ou de obtenção de dados, por exemplo.

Assim, devemos dar subsídios e auxiliar os estudantes, por meio de novas metodologias para uma aprendizagem de conteúdos satisfatória. Por que isso não pode ser feito utilizando estratégias apropriadas e baseadas nos avanços tecnológicos que estão disponíveis a esses alunos todos os dias?

Moreno e Azcárate (1997; 2003) verificaram, em parte de seu trabalho, que a aula tradicional, baseada em métodos analíticos e técnicas de resolução de EDs e solução de problemas modelados apresentados como exemplo, é predominante entre os professores universitários. Eles ainda apontam que esse estilo de ensino tem trazido uma sensação de fracasso entre os professores, e tem transformado os alunos em “resolvedores” de EDs. Por isso, a importância de se pensar em uma nova metodologia de ensino-aprendizagem em cursos de engenharia, os quais requerem aplicações em problemas reais e discussões sobre a formulação e os resultados adquiridos na modelagem.

Mas, como mudar essa prática e transformar esses alunos em seres atuantes, críticos e reflexivos?

A fim de melhorar a qualidade da aprendizagem de futuros engenheiros, de forma que desenvolvam competências e habilidades de aplicação

dos conhecimentos na resolução de problemas reais, muitos pesquisadores têm se dedicado a estudar os processos de ensino e aprendizagem, visando à compreensão de conceitos e produção de significados dos conteúdos relacionados às EDs. Diversos trabalhos sugerem que um enfoque qualitativo, baseado em situações-problema, que, para sua solução, sejam utilizados recursos computacionais, é uma possibilidade de ensino de EDs que favorece o processo de aprendizagem dos conteúdos (DE OLIVEIRA; IGLIORI, 2013).

No que trata as aplicações a problemas reais, J. Stewart (2013, p. 525) afirma que:

Quando cientistas físicos ou cientistas sociais usam cálculo, muitas vezes o fazem para analisar uma equação diferencial que tenha surgido no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estejam estudando.

Assim, podemos dizer que, a modelagem é um processo eficaz no entendimento de fenômenos relacionados a situações reais.

Um exemplo de trabalho realizado com uma turma de Engenharia Química é o de Dullius, Veit e Araujo (2007). Nesse trabalho, os autores utilizam um material instrucional baseado em guias com questões intermediárias que leva o grupo de alunos a explorar um modelo pronto fornecido ou a elaborar um modelo para o problema proposto. Essa exploração ou elaboração de um modelo foi feita a partir de uma ferramenta computacional, um *software* de distribuição gratuita, que permite modelar um sistema a partir de um diagrama de fluxo. Dessa forma, os alunos foram instigados a analisar o comportamento da solução de uma EDO, para, na sequência, serem apresentados a métodos de obtenção de solução analítica. Outro trabalho que utiliza recursos computacionais no ensino de EDOs é o trabalho de Javaroni (2009). A autora descreve o processo de visualização dos alunos, no qual, em uma das atividades propostas, por exemplo, os alunos relacionaram campos de direções dados a EDOs apresentadas sem determinar algebricamente as soluções. Essa visualização, utilizando ferramentas computacionais, motivou os alunos a uma discussão matemática sobre o comportamento da solução procurada e os guiou no desenvolvimento analítico de uma solução.

Esses e outros trabalhos se mostraram promissores e tiveram como premissa apresentar o estudo qualitativo de EDOs a partir de situações-problema e visualização de gráficos e tabelas. Mas, muitas vezes, os autores “esbarram” na dificuldade dos alunos em entender o significado de derivada como taxa de variação, e assim introduzir a modelagem matemática de fenômenos reais utilizando EDOs. Neste trabalho, buscamos o entendimento desse significado a partir de regras de inferência de um sistema *p-fuzzy* e, conseqüentemente, da modelagem matemática de um problema real.

A abordagem de EDs utilizando sistemas *fuzzy* é relativamente nova e pode ser encontrada em diversos trabalhos, sendo exploradas tanto no aspecto de definições de regras de inferência para aproximação com a solução desejada (FERREIRA, 2011; FERREIRA, 2012) quanto na formulação de modelos para estudo de um fenômeno natural (LEITE; BASSANEZI, 2010). Entretanto, uma abordagem de ensino de EDOs em cursos de engenharia utilizando sistemas *p-fuzzy* é um conceito inédito do ponto de vista metodológico.

O sistema *p-fuzzy* foi escolhido, primeiramente, pela experiência das autoras com esse tipo de abordagem e também com a experiência em sala de aula e em trabalhos de iniciação científica, quando da apresentação dos conceitos de EDOs para alunos de engenharia.

Este trabalho está dividido em mais quatro seções: a próxima apresenta uma breve explanação de sistemas *fuzzy* e *p-fuzzy*; a seção seguinte explicita a metodologia utilizada para encontrarmos a solução do problema utilizando um sistema *p-fuzzy*; a penúltima seção ilustra nossa proposta de apresentação do problema aos alunos, com a utilização do sistema *p-fuzzy*, e como essa apresentação pode motivá-los no processo de aprendizagem dos conteúdos relacionados; e, por fim, a última seção traz nossas discussões finais e perspectivas futuras com relação a este trabalho.

## SISTEMAS FUZZY E P-FUZZY

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos da teoria de conjuntos *fuzzy*, necessários para a compreensão do texto, sendo que uma descrição mais aprofundada pode ser encontrada em Barros e Bas-

sanezi (2006), em Tiago, Baroni e Fonseca (2014) e em Barrantes (2011).

O termo “*fuzzy*” foi pela primeira vez citado em 1962, pelo Dr. Lotfi Zadeh, considerado o pai da lógica *fuzzy*, em um jornal sobre engenharia chamado *Proceedings of the IRE* (ZADEH, 1962).

Um paradoxo que pode nos ajudar a entender a lógica *fuzzy* é o “Paradoxo de Epimênides”,<sup>1</sup> que pode ser enunciado da seguinte forma: Era uma vez um acusado que disse: “Enquanto a minha mentira não for desvendada, continuarei mentindo”. Em seguida, o juiz disse: “Se o acusado mentir, seu advogado também mentirá”. Por fim, o advogado disse: “Quem for capaz de desvendar a minha mentira dirá a verdade”. Qual deles está mentindo?

Como analisar esse paradoxo? Se Epimênides diz a verdade, então, ele está mentindo; e se ele está mentindo, então a sua afirmação é verdadeira. Essas proposições violam o Princípio da Não-Contradição da lógica clássica, pois uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

O ser humano toma decisões a partir de sua habilidade de exercitar a análise e o controle baseado no método *fuzzy*. Um exemplo: suponha que você está dirigindo a uma distância de 1 km do carro à frente, e a sinalização indica 60 km/h. Entretanto, a maioria dos outros carros está por volta de 65 km/h. É comum e mais seguro você decidir por “seguir o fluxo”. Como definir com precisão a decisão de “seguir o fluxo”? Esse tipo de análise *fuzzy*, o ser humano faz a todo o momento, já que alguns carros estão acima de 65 km/h e outros abaixo. Então, como avaliar?

Em vista disso, um conjunto *fuzzy* pode ser visto como uma generalização dos conjuntos clássicos. Ele pode ser entendido como um conjunto que permite que elementos tenham graus diversos de pertencimento a esse conjunto. Além da função de pertinência, um conjunto *fuzzy* deve ser associado a um conceito linguístico, como, por exemplo, “Excelente”. Essa associação é utilizada para facilitar a construção das regras pelo especialista, sendo assim, compreensível. Adotando uma base de conhecimento (regras de inferência) que relacionam essas

1 Epimênides foi um poeta, filósofo e místico grego, que viveu em meados dos anos 600 a.C. na cidade de Creta (BOWDER, 1982). Ele aparece também no Novo Testamento, na Epístola que o apóstolo Paulo escreveu a Tito (Tito 1:12).

funções de pertinência constrói-se o mecanismo de inferência (YEN, 1999).

Nos conjuntos *fuzzy*, as funções de pertinência e as regras de inferência são obtidas a partir do problema proposto, sendo necessário um conhecimento parcial por parte do “especialista” para a modelagem do sistema. No caso do problema proposto neste artigo, para determinar a velocidade de um corpo em queda livre e sua velocidade terminal, esse conhecimento prévio do especialista baseia-se nos conhecimentos físicos do problema, no conhecimento do comportamento da velocidade inicial com resultados de dados experimentais e, principalmente, em conceitos de taxa de variação da velocidade do corpo, ou seja, em conteúdos abordados em Cálculo Diferencial e Integral.

A estrutura de um sistema baseado em lógica *fuzzy* possui quatro etapas: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação. Na teoria *fuzzy*, valores intermediários, chamados de grau de pertinência, são permitidos, e a produção dessas funções que definem graus de pertinência é chamada de “fuzzificação”. A fuzzificação, então, é o processo no qual são definidas as variáveis de entrada e de saída, para as quais são atribuídos termos linguísticos que descrevem seu estado. É nessa etapa do processo que são construídas as funções de pertinência.

Todos os conjuntos *fuzzy* representando as variáveis relacionadas por funções de pertinência são chamados de base de conhecimento. Um conjunto de regras de inferência é adotado para manipular a base de conhecimento. O método mais utilizado para representar o conhecimento humano é através de expressões de linguagem natural como: SE (antecedente) ENTÃO (consequente).

A base de conhecimento tem informações incertas, porém significativas para a modelagem do sistema. Essa incerteza é completamente resolvida com a entrada e saída dos conjuntos *fuzzy* e com a estratégia de manipulação da base de conhecimento pré-definidas. A base de conhecimento utilizada neste trabalho foi modelada com informações significativas para o sistema, de acordo com informações qualitativas do problema modelado (TIAGO; BUENO; BARBOSA, 2011).

Em seguida, é definido o modelo de inferência utilizado. Os tipos de modelos de sistemas de inferência *fuzzy* são diferenciados pela habilidade em representar diferentes tipos de informação, ou seja, na forma que se representa a base de regras. O modelo de inferência utilizado neste trabalho é o modelo Mamdani (MAMDANI, 1975 e 1976), que é o modelo mais utilizado na literatura e que inclui os modelos linguísticos baseados em coleções de regras SE-ENTÃO. Maiores detalhes podem ser encontrados em Tiago, Baroni e Fonseca (2014) e em Barrantes (2011).

Após definidas as regras e o método utilizado, ocorre à inferência. Na defuzzificação é necessário um processo de tradução do conjunto *fuzzy* resultante do método de inferência para um número real. Na literatura existem alguns métodos de defuzzificação, entre eles: centroide, centro dos máximos, média dos máximos, princípio da máxima associação, também conhecido como método da altura, e bissector.

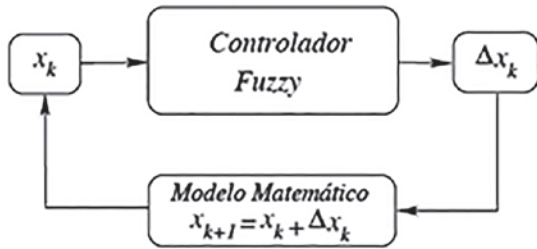
A escolha da estratégia de defuzzificação utilizada no sistema deste trabalho foi realizada de forma empírica, por meio do desempenho na simulação para o caso em análise. O método de defuzzificação escolhido foi método centroide, bastante utilizado na literatura e que retorna o centro da área sob a curva.

Todos esses processos de inferência *fuzzy*, definidos anteriormente, podem ser vistos como controladores *fuzzy*, uma vez que controlam a saída desejada pelo especialista, e são responsáveis pela dinâmica dos sistemas *p-fuzzy*. Denominamos de sistema parcialmente *fuzzy* ou *p-fuzzy* ao sistema iterativo a seguir.

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

em que  $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ . Aqui  $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$  é chamado de variação e é obtido pela saída defuzzificada de um sistema baseado em regras *fuzzy* (CECCONELO, 2006). Sua arquitetura pode ser vista na Figura 1, a seguir.

Figura 1 – Arquitetura de um sistema p-fuzzy.



Fonte: Extraído de Santos e Bassanezi (2009).

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis de entrada quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo assim, uma ferramenta muito útil para modelar fenômenos cujo comportamento seja parcialmente conhecido. Por isso, surge a ideia de se utilizar os sistemas p-fuzzy como uma metodologia de modelagem e ensino-aprendizagem de EDOs em cursos de engenharia. Conhecidas as condições físicas do problema, podemos modelar a solução, por meio de sistemas p-fuzzy, sem identificarmos o modelo determinístico com a equação diferencial, apenas conhecendo o comportamento do problema, resultados experimentais e a variação de tempos em tempos da variável envolvida. Nesse contexto, esperamos que o aluno aprenda a modelar a solução do problema com conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, utilizando taxas de variação da variável em estudo e só depois tendo contato com a formulação matemática do modelo determinístico, ou seja, a EDO envolvida, comparando com a solução obtida pelo sistema p-fuzzy. Isso conduz o aluno de engenharia ao aprendizado através de uma situação-problema real, fazendo uma ligação com outras disciplinas do seu curso e construindo resultados, sem a necessidade inicial de formular o modelo determinístico.

## METODOLOGIA

### O problema físico/Dados experimentais

O problema a ser considerado para o ensino-aprendizagem de EDO por meio de sistemas p-fuz-

zy consiste em descobrir uma função que melhor represente a velocidade de um corpo em queda livre, estimando sua velocidade terminal, ou seja, perto da superfície da Terra. Maiores detalhes desse problema podem ser obtidos em Chapra e Canale (2008) e Kozama e Tiago (2011).

Sabemos, com base na segunda lei de Newton que

$$F = ma$$

onde  $F$  é a força resultante agindo no corpo (N ou Kg  $m/s^2$ ),  $m$  a massa do objeto (Kg) e  $a$  é a sua aceleração ( $m/s^2$ ). A mesma pode ser usada para modelar e determinar esta velocidade. Um modelo para este caso pode ser deduzido expressando a aceleração como taxa de variação da velocidade no tempo. Assim:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

onde  $v$  é a velocidade ( $m/s$ ) e  $t$  é o tempo ( $s$ ). Se a força resultante for positiva, o objeto acelerará. Se for negativa, o objeto vai desacelerar. Se a força resultante for nula, a velocidade do objeto permanecerá em um nível constante. Para um corpo em queda livre na vizinhança da Terra, a força resultante é composta de duas forças opostas: a força gravitacional, para baixo,  $F_D$  e a força da resistência do ar, para cima,  $F_U$ :

$$F = F_D + F_U$$

Se associarmos um sinal positivo à força para baixo, a segunda lei de Newton pode ser usada para escrever a força devida à gravidade como:

$$F_D = mg$$

onde  $g$  é a constante gravitacional, ou a aceleração devida à gravidade, que é aproximadamente igual a  $9,8 m/s^2$ .

A resistência do ar pode ser formulada de diversas maneiras. Uma abordagem simples é assumir que ela é linearmente proporcional à velocidade e age no sentido para cima, como em:

$$F_U = -cv$$

onde  $c$  é uma constante de proporcionalidade chamada coeficiente de arrasto  $kg/s$ . Portanto, quanto

maior a velocidade de queda, maior a força para cima devida à resistência do ar. O parâmetro  $c$  representa as propriedades de objetos em queda livre, como a forma ou a aspereza da superfície, que afetam a resistência do ar. No caso presente,  $c$  poderia ser uma função relacionada ao tipo de vestimenta utilizada, por exemplo, um macacão, ou da orientação usada pelo corpo durante a queda livre.

A força resultante é a diferença entre a força para baixo e a força para cima. Portanto, as equações combinadas fornecem:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

Essa é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem não homogênea, escrita em termos da taxa de variação instantânea da variável que estamos interessados em estimar. Para se obter a solução analítica dessa equação, vamos considerar que o corpo esteja inicialmente em repouso, ou seja,  $v = 0$  em  $t = 0$ , fornecendo um Problema de Valor Inicial (PVI) cuja solução é:

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right)$$

Observamos também que, após um tempo suficientemente longo, é atingida uma velocidade constante, chamada de velocidade terminal  $v_t = \frac{gm}{c}$ . Essa velocidade é constante porque, eventualmente, a força da gravidade estará em equilíbrio com a resistência do ar. Portanto, a força resultante é nula e a aceleração deixa de existir.

Para a modelagem do sistema p-fuzzy, utilizamos também dados experimentais obtidos por Chapra e Canale (2008), principalmente para verificar o comportamento da variação da velocidade com o tempo, e para definir uma velocidade inicial para o sistema fuzzy (Tabela 1). O problema em estudo considera para os cálculos  $c = 12,5 \text{ kg/s}$  e  $m = 68,1 \text{ kg}$ , importantes para estimar qual velocidade terminal seria atingida pelo corpo em queda livre na modelagem p-fuzzy, que é  $v \cong 53,39 \text{ m/s}$ .

**Tabela 1: Velocidades experimentais de um corpo em queda livre.**

Tempo(s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Vel. Exp. (m/s)	10	16,3	23	27,5	31	35,6	39	41,5	42,9	45	46	45,5	46	49	50

## Modelagem do sistema p-fuzzy

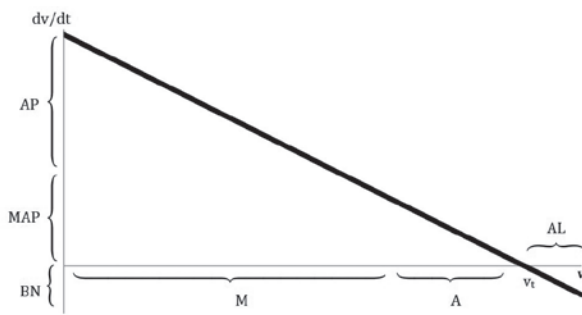
O modelo fuzzy foi desenvolvido com o auxílio do software Matlab, por meio de seu *toolbox fuzzy*. O MatLab (Matrix Laboratory) é um software de alto desempenho, criado no fim dos anos de 1970, por Cleve B. Moler, com interface amigável, voltado especialmente para o cálculo numérico (MATHWORKS, 2013). A potencialidade desse software está, principalmente, no seu conjunto de *toolboxes*, que são funções externas e adaptáveis para diferentes aplicações. O *toolbox fuzzy* é comumente utilizado para descrição e modelagem de sistemas baseados em lógica fuzzy, e foi aplicado para descrever o modelo deste trabalho.

Para o sistema p-fuzzy, foram construídos controladores fuzzy, a partir de um sistema baseado em regras fuzzy, que têm como variáveis de entrada “velocidades” ( $V$ ) e de saída “Variaçãovel” ( $\Delta V$ ).

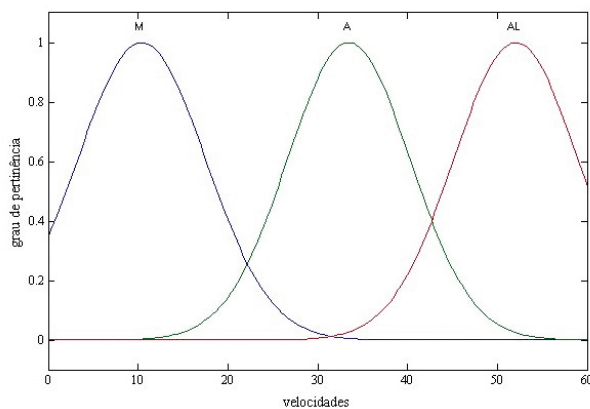
Para a variável “velocidades”, adotamos o seguinte conjunto de termos linguísticos,  $V = \{\text{Média (M), Alta (A), Altíssima (AL)}\}$ . A variação da velocidade com o tempo está representada, na Figura 2, por uma reta, que pode ser relacionada com os dados experimentais da Tabela 1.

Em virtude disso, e sabendo da alta taxa de variação das velocidades no conjunto Média (M), utilizamos, para a variável “Variaçãovel”, o seguinte conjunto de termos linguísticos:  $\Delta V = \{\text{Baixa negativa (BN), Média Alta positiva (MAP), Alta positiva (AP)}\}$ . Na Figura 2, podemos perceber que a velocidade é inversamente proporcional à taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, sendo que a base com três regras foi escolhida a partir dessas informações.

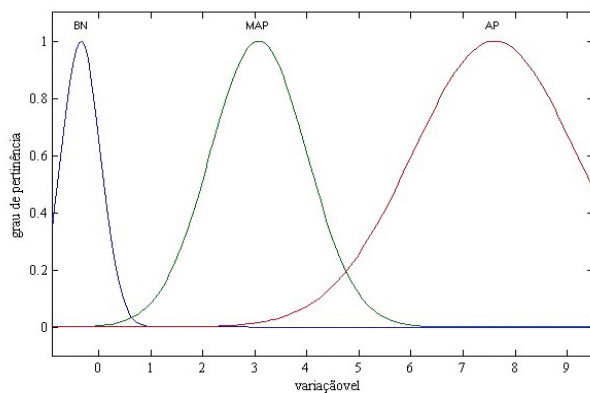
**Figura 2 – Reta usada para determinação da base de regras.**



**Figura 3 – Funções de pertinência para a variável de entrada “velocidades”.**



**Figura 4 – Funções de pertinência para a variável de saída “Variaçãoovel”.**



As funções de pertinência para as variáveis “Velocidades” e “Variaçãoovel” são apresentadas nas Figuras 3 e 4. Pelos testes analisados, verificamos que a função gaussiana escolhida suavizava os “bicos” formados na transição da velocidade de uma faixa a outra, em comparação com os testes usando a função trapezoidal. O método de inferência utilizado foi o Mamdani e o método de defuzzificação

escolhido foi o centroide, já que produziram os melhores resultados. No futuro, podem ser feitos testes com outro método de inferência e outro método de defuzzificação.

## APRESENTAÇÃO AOS ALUNOS

Para a apresentação da solução do problema proposto aos alunos do curso de engenharia, utilizando modelagem por meio de sistemas *p-fuzzy*, será utilizada a metodologia de George Polya, que propõe que a resolução de problemas deve seguir quatro passos fundamentais: compreender o problema; desenvolver um plano; implementar o plano; e avaliar a solução (POLYA, 2006). A grande dificuldade na aprendizagem dos conceitos de EDOs é a forma como o conteúdo geralmente é apresentado. O que praticamos, geralmente, leva os alunos a memorizarem o uso de algoritmos com técnicas de solução, sem que se faça uso do pensamento crítico com modelagem e aplicação dos problemas propostos.

Segundo Polya (2006), a resolução de problemas propicia aos alunos o desenvolvimento de uma linha de raciocínio que pode contribuir com o entendimento dos métodos de resolução, em que o professor é o mediador da situação-problema que conduz os alunos à solução. Dessa forma, os alunos atuam como matemáticos, investigando problemas do seu cotidiano, abertos e desafiadores. Essa oportunidade, que o ensino a partir de resolução de problemas cria no ambiente escolar, parece ser um bom método para o ensino de EDOs em cursos de engenharia.

O problema proposto aos alunos para motivar a aprendizagem de EDOs é descobrir uma função que melhor descreva o comportamento da velocidade de um corpo em queda livre, desde o início do movimento até um tempo consideravelmente longo, depois do início da queda. Isso porque é comum, entre os alunos, a prática de esportes radicais, e essa problematização pode ser relacionada à prática do paraquedismo.

É apresentado aos alunos um conjunto de dados experimentais da velocidade de um corpo, como os descritos na Tabela 1. Esse corpo pode ser apresentado como um paraquedista “solto” por um avião. Outro ponto importante desse problema,

além de ser ligado ao cotidiano dos alunos, está no fato de proporcionar a interdisciplinaridade com conteúdos da disciplina de Física e de Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas importantes para os futuros profissionais de cursos de engenharia.

Em um primeiro momento, passando pela fase de “compreender” o problema, podemos mostrar um vídeo de um salto para os alunos. Em seguida, indagar sobre quais as variáveis que estão envolvidas, fazendo-os perceberem que a velocidade depende do tempo. Além disso, questioná-los sobre algumas condições físicas, fazendo possivelmente algumas simplificações sobre o fato do corpo ter, no tempo  $t = 0$ , a velocidade inicial  $v = 0$ . Também fazer perguntas sobre quais outras condições estão envolvidas na queda do corpo, levando aqueles que já cursaram a disciplina de Física a se questionarem sobre a aceleração da gravidade, que levaria a uma força para baixo adotada como positiva e outra para cima, que dependeria da resistência do ar.

Em um segundo momento, passando para a fase de “desenvolver um plano” de solução para o problema, podemos questioná-los a respeito de possíveis teorias para a solução do problema. Eles podem tentar uma relação com o Método dos Mínimos Quadrados, fazendo uma ligação com a disciplina de Cálculo Numérico, já que foram considerados também dados experimentais no problema. Nessa fase, podemos sugerir que esbocem o gráfico da velocidade experimental, para que assim entendam o comportamento do gráfico de velocidade. Os resultados gráficos mostram que o gráfico da velocidade sobe muito rapidamente, mas, depois, começa a estabilizar, em curto espaço de tempo (15 segundos). Isso pode levar os alunos a observarem o comportamento da velocidade, questionando: por que estabiliza? Também perguntar sobre a aceleração da gravidade ou da força de resistência do ar. Com isso, o professor, como intermediador, pode perguntar como é possível relacionar essa velocidade com o tempo, e se os alunos conhecem algum problema relacionado com esse. Assim, o professor pode conduzir os alunos a relacionarem esse resultado com a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, e, com base no gráfico dos dados experimentais, mostrar a alta variação da velocidade, evidenciando a inclinação das retas tangentes, conectando, assim,

ao conteúdo da disciplina de Cálculo Diferencial. Com base na interpretação do gráfico, podemos perguntar o que os alunos esperam que aconteça depois dos 15 segundos apresentados, fazendo uma ligação com os saltos executados pelos paraquedistas. Nesse ponto, podem perceber que essa velocidade se estabiliza, e são informados de que é chamada de velocidade terminal. Com essa discussão, podemos chamar a atenção dos alunos sobre a importância da taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, o que é imprescindível para a obtenção da solução do problema.

Em um terceiro momento, passando para a fase de “implementar um plano” de solução, o professor motiva os alunos a utilizarem conceitos de lógica *fuzzy* e a fazerem a modelagem do problema por meio de sistemas *p-fuzzy*.<sup>3</sup> É interessante, nesse ponto, utilizar a ideia de que o sistema baseado em regras *fuzzy* deve ter como variável de entrada a velocidade, que pode ser até mesmo a primeira velocidade experimental de 10 m/s, já que são os dados que conhecemos do problema, e que a variável de saída deve ser a variação da velocidade. Isso pode ser feito perguntando aos alunos quais são as informações do problema, quais as variáveis fornecidas, e como eles esperariam obter a próxima velocidade, conhecendo a anterior. Devemos deixar claro que, utilizando o sistema *p-fuzzy*, esperamos que essa entrada nos forneça como saída a variação da velocidade e que, na próxima iteração, essa variação encontrada somada à velocidade inicial vai nos fornecer a próxima velocidade, e assim por diante. Dessa forma, instigamos os alunos a esboçarem o gráfico dos resultados experimentais para que, depois de algumas tentativas sobre como seriam tais variações das velocidades, consigam modelar a base de regras e percebam que, no início, com as velocidades baixa a média (M), a variação da velocidade é alta e positiva (AP); que, com velocidade alta, a variação fica menor, o que podemos chamar de média alta positiva (MAP), já que essa variação diminui, mas não tão rapidamente; e que, quando a velocidade fica altíssima (AL), a variação deve diminuir para atingir a velocidade terminal, chamando-a de baixa negativa

3 Aqui, é importante salientar que os alunos devem ter o conhecimento sobre lógica *fuzzy* e saber como utilizá-la. As autoras enaltecem, nesse momento, a importância de disciplinas optativas ou de oficinas temáticas para o ensino e aplicação de lógica *fuzzy* em cursos de engenharia.



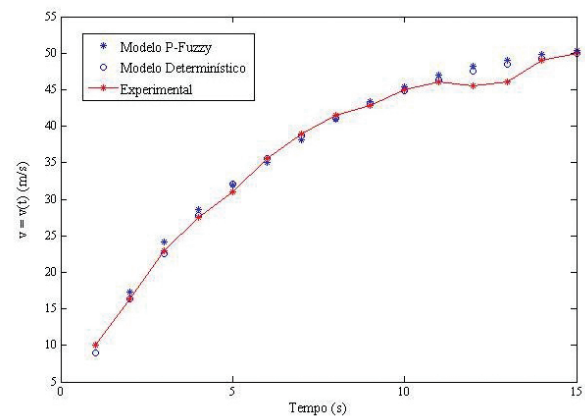
(BN). Os alunos podem propor outras modelagens, investigando melhores resultados. Assim, podemos levá-los a modelarem com diferentes funções de pertinência, trapezoidais ou triangulares, até chegarem na modelagem tipo gaussiana, que suaviza os dados, não formando “bicos” nas transições de velocidades.

A partir daí, os alunos farão a simulação do problema modelado com sistemas *p-fuzzy*. Em seguida, poderão comparar com os dados experimentais, e verificarão quais modificações podem ser feitas nas funções de pertinência para se atingir melhores resultados, alterando o domínio que as velocidades podem atingir, ou até o valor das funções de pertinência para a variável variação das velocidades. Aqui, é necessária a utilização de conhecimentos físicos para que os alunos percebam, pelos resultados experimentais, que a velocidade terminal, no caso do corpo do problema, com 68,1kg, está aproximadamente um pouco acima de 50m/s. Isso é o mais subjetivo de modelar, tanto por modelagem matemática, utilizando o modelo determinístico (EDO), quanto pelos sistemas *p-fuzzy*, já que o problema depende do peso do corpo e do coeficiente de arrasto.

Na última e quarta etapa, a de “avaliar a solução”, devemos questionar os alunos sobre outras possibilidades de resolver o problema; podemos mostrar, também, que esse tipo de modelagem pode ser aplicado a outros problemas e levá-los a perceber quais são esses problemas. Podemos perguntar o que esses problemas têm em comum: sempre há uma taxa de variação de alguma variável envolvida? Nesse momento, podemos iniciar a relação com a modelagem matemática determinística, utilizando as ideias de força gravitacional, força de resistência do ar, como enunciado na seção “O problema físico/Dados experimentais”, e assim obter a equação diferencial envolvida. Os alunos poderão perceber que o conteúdo já abordado, sobre EDO de primeira ordem linear não homogênea, possui uma aplicação no cotidiano, e que sua solução, já estudada, pode ser devidamente comparada ao resultado proposto com sistemas *p-fuzzy*. Podemos, nesse ponto, perguntar quais condições são necessárias para conseguir modelar utilizando sistemas *p-fuzzy*, para que percebam que já possuíam informações parciais do problema a ser modelado; e que essa modelagem

não apresenta dificuldades, fazendo apenas o uso de linguagem natural e de símbolos linguísticos, assim como de conteúdos já abordados, principalmente na disciplina de Cálculo Diferencial, contribuindo para a interdisciplinaridade. Os alunos, nessa fase, podem melhorar o resultado gerado pelo sistema *fuzzy*, já que podem comparar os 15 segundos iniciais experimentais com os resultados desenvolvidos pelo sistema *p-fuzzy* e com a solução analítica da EDO. Em seguida, podemos estimar a velocidade terminal, fazendo pequenos ajustes nas funções de pertinência para que atinja a velocidade pretendida. Um exemplo do resultado que pode ser obtido é apresentado na Figura 5, a seguir.

**Figura 5 – Uma comparação entre o modelo utilizando o sistema *p-fuzzy*, o modelo determinístico e os dados experimentais para o problema do corpo em queda livre.**



Dessa forma, ao utilizarem esse processo de investigação/apresentação, os alunos podem desenvolver o raciocínio com mais naturalidade, compreendendo a resolução, além de consolidar os conceitos envolvidos nas disciplinas de Equações Diferenciais Ordinárias, Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico e Física. Essa interdisciplinaridade faz-se muito importante para os alunos de cursos de engenharia, dada a demanda exigida no mercado de trabalho desses futuros profissionais.

## DISCUSSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este artigo apresenta uma proposta do uso de modelagem matemática por sistemas *p-fuzzy* no ensino de EDOs para alunos dos cursos de engenharia.

Nossa proposta utiliza uma ferramenta computacional como base para a aula e o desenvolvimento de uma atividade por meio de um problema aplicado e próximo à vivência do aluno.

A atividade proposta neste trabalho sugere a apresentação do problema aos alunos a partir das quatro fases de resolução de problemas dadas por Polya (2006), de forma que o professor seja o mediador e os alunos atuantes e construtores do conhecimento. Dessa forma, com a mediação do professor, os estudantes têm a oportunidade de criar indagações relacionadas a conhecimentos já adquiridos. Essa ideia de mediar os questionamentos, a fim de criar a possibilidade de os alunos se indagarem e/ou perguntarem e/ou, ainda, de criarem relações quanto a conhecimentos prévios vai ao encontro do que Paulo Freire sugere como “início de conhecimento”:

O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário (FREIRE; FAUNDEZ, 1998, p. 46).

A Teoria da Aprendizagem Significativa, de Ausubel, também contribuiu com o desenvolvimento deste trabalho, pois a construção dos modelos utiliza a estratégia de aprendizagem com a modelagem matemática como elemento significativo, trabalhando com uma situação-problema ligada ao cotidiano dos alunos, com uma interdisciplinaridade – com conteúdos da disciplina de Física e elementos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Ausubel (2003), com novos materiais, o educando é capaz de fazer a assimilação de conceitos não mais de forma arbitrária e literal, mas de forma cognitiva.

Também destacamos que a atividade sugerida apresenta um caráter interdisciplinar. Os alunos de cursos de engenharia podem estudar a modelagem a partir de conhecimentos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (taxa de variação, por exemplo) e também da disciplina de Física.

O emprego da lógica *fuzzy*, a partir da utilização de um sistema *p-fuzzy*, justifica-se pela fácil compreensão do *toolbox* de *fuzzy* e, principalmente, devido à base de conhecimento ser construída utilizando conceitos linguísticos, ou seja, é baseada

numa linguagem natural, como por exemplo, AL – altíssima, MAP – média alta positiva, etc. Essa associação a conceitos linguísticos facilita a construção das regras pelos alunos e o entendimento do resultado obtido.

Outra vantagem da modelagem utilizando sistemas *fuzzy* em um ambiente de aprendizado como a sala de aula e que contribua para a construção do conhecimento matemático e, conseqüentemente, dos conceitos de EDOs, é trazido no trabalho de Corcoll-Spina (2010, p. 159). Ela afirma, a partir de seu trabalho, que podemos considerar que:

[...] quando o conhecimento (matemático) é resultado de uma ação frente a situações/contradições que emergem da realidade, fica mais e mais evidente que este é, ao mesmo tempo, resultado de atividade mental (cognição) e produto criativo dessa atividade [...].”

E também:

[...] os problemas apresentados e discutidos na pesquisa, não postos para o problema da matemática tradicional clássica, remetem o resolvidor para uma atmosfera de incerteza, provocando a opinião e a interpretação dos mesmos.

Logo, além de resolver um problema aplicado a uma situação real e promover indagações pelos alunos, proporcionamos uma atividade criativa. Esperamos que os alunos de engenharia sejam capazes de interpretar o resultado e validar a modelagem do problema a partir da observação dos dados, resultando, assim, no conhecimento matemático relacionado.

Como nos diz D’Ambrósio (1996, p. 80): “O grande desafio da educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã”; e “Nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas”. Com essas reflexões finais, esperamos que este trabalho sirva como sugestão para trabalhos futuros, de aplicação e publicação de relatos referentes ao uso dessa proposta em sala de aula.

## AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem ao Prof. Dr. Paulo Roberto Barbosa, pelas frutíferas discussões e apoio na publicação deste artigo, e ao fomento do IFSP (via edital 67/2012).

## REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Coimbra: Paralelo, 2003.
- BARRANTES, A. C. **Sistema de inferência fuzzy aplicado na avaliação discente**. 27 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em <[http://matematica.spo.ifsp.edu.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=87&Itemid=181](http://matematica.spo.ifsp.edu.br/index.php?option=com_content&view=article&id=87&Itemid=181)>. Acesso em: 10 mar. 2014.
- BARRROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Tópicos de lógica fuzzy e bio-matemática. **Coleção IMECC – Textos Didáticos**. v. 5. Campinas: Unicamp, 2006.
- CECCONELO, M. S. **Modelagem alternativa para dinâmica populacional**: sistemas dinâmicos fuzzy. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- CORCOLL-SPINA, C. de O. **Lógica fuzzy**: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.
- DE OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. **Em teia – Revista de educação matemática e tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n. 2, p. 1-24, 2013.
- DULLIUS, M. M.; VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. **Uso de recursos computacionais para o ensino e aprendizagem de equações diferenciais**. XXXV CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA (COBENGE), 2007, Anais... Disponível em: <[http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2007/artigos/268-Maria Madalena Dullius.pdf](http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2007/artigos/268-Maria%20Madalena%20Dullius.pdf)>. Acesso em: 9 mar. 2014.
- FERREIRA, D. P. L. **Sistema p-Fuzzy aplicado às equações diferenciais parciais**. 75 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.
- FERREIRA, T. F. **Sistemas p-Fuzzy modificados para dinâmicas populacionais**: modelagens e simulações. 138 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2012.
- FREIRE, P., FAUNDEZ, A. **Por uma pedagogia da pergunta**. 4. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.
- LEITE, J.; BASSANEZI, R. C. Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos. **Biomatemática**, v. 20, p. 157-166, 2010.
- JAVARONI, S. L. O processo de visualização no curso de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 28, n. 1, p. 17-25, 2009.
- KOZAMA, T. T.; TIAGO, G. M. Aplicação do método dos mínimos quadrados: problema do paraquedista em queda livre. **Sinergia**, v. 12, n. 1, p. 93-98, 2011.
- MAMDANI, E. H.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. **International Journal of Man-Machine Studies**, v. 7, n. 1, p. 1-13, 1975.
- MAMDANI, E. H. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. **International Journal of Man-Machine Studies**, v. 8, n. 6, p. 669-678, 1976.
- MATHWORKS. **About MathWorks**: Cleve Moler; Jack Little (Founders), 1994. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/company/aboutus/founders/cleve-moler.html>>. Acesso em: 8 out. 2013.
- MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. **Revista Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 15, n. 1, p. 21-34, 1997.
- MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones y Creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. **Revista Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 21, n. 2, p. 265-280, 2003.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Título original: How to solve it, 1945.
- SANTOS, L. R.; BASSANEZI, R. C. Sistemas p-fuzzy unidimensionais com condição ambiental. **Biomatemática**, v. 19, p. 11-24, 2009.
- STEWART, J. **Cálculo**. v. II, São Paulo: Cengage Learning, 2013. Título original: Calculus: early transcendentals.
- TEODORO, A.; VASCONCELOS, M. L. (org.) **Ensinar e aprender no ensino superior**: por uma episte-

mologia da curiosidade na formação universitária. São Paulo: Mackenzie; Cortez, 2003.

TIAGO, G. M.; BARONI, M. P. M. A.; FONSECA, R. F. Avaliação discente: uma proposta utilizando a lógica *fuzzy*. **REVEMAT: Revista eletrônica de educação matemática**, v. 9, p. 87-109, 2014.

TIAGO, G. M.; BUENO, E. I.; BARBOSA, P. R. **Air quality monitoring using fuzzy logic**. In: 21st INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, Natal, 2011.

YEN, J. Fuzzy logic: a modern perspective. **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, v. 11, n. 1, p. 153-165, 1999.

ZADEH, L. A. From circuit theory to system theory. **Proceedings of the IRE**, v. 50, n. 5, p. 856-865, 1962.

---

### DADOS DAS AUTORAS



**Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni**, licenciada em Matemática, mestre e doutora em Computação Aplicada pelo Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (LAC/INPE), professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), *campus* São Paulo, e dos Programas de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática e PROFMAT, *campus* São Paulo, Membro do Grupo de Pesquisa em Matemática pura e aplicada à fenômenos realísticos e ao ensino básico e tecnológico do IFSP, *campus* São Paulo. Endereço para correspondência: Rua Pedro Vicente, 625, Canindé, São Paulo – SP, CEP: 01109-010, *E-mail*: mariana.baroni@gmail.com



**Graziela Marchi Tiago**, licenciada e bacharela em Matemática, mestre em Matemática Aplicada e doutora em Engenharia Mecânica pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP), professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), *campus* São José dos Campos, SP, e dos Programas de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática e PROFMAT, *campus* São Paulo, SP, Membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Profissional (GPMEP) do IFSP, *campus* São Paulo, SP. Endereço para correspondência: Rodovia Presidente Dutra, s/n, saída Km 145, Jardim Diamante, São José dos Campos – SP, CEP: 12223-201, *E-mail*: grazielamarchi@gmail.com