

# O FORMALISMO VARIACIONAL DE LAGRANGE E HAMILTON NO ENSINO DE MECÂNICA BÁSICA NA GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA

Germano Amaral Monerat<sup>a</sup>  
Thaís Marques Gomes de Oliveira<sup>b</sup>  
Diego Coutinho Fernandes Silva<sup>c</sup>  
Eduardo Vasquez Corrêa Silva<sup>d</sup>

## RESUMO

É possível introduzir o formalismo variacional de Lagrange e Hamilton para a mecânica clássica, como conteúdo do módulo básico de um curso de graduação em engenharia, tendo como pré-requisitos as ferramentas do cálculo diferencial e integral para funções de muitas variáveis e da análise vetorial, tradicionalmente presentes nas grades curriculares. Este formalismo mostra-se mais sistemático e algebricamente menos trabalhoso do que o formalismo newtoniano, tradicionalmente utilizado nos cursos de graduação, como ferramenta de obtenção das equações de movimento de um sistema de partículas. São examinados dois exemplos: o pêndulo simples e o pêndulo duplo.

**Palavras-chave:** Mecânica clássica. Formalismo variacional. Pêndulo simples. Pêndulo duplo.

## ABSTRACT

It is possible to introduce Lagrange and Hamilton variational formalisms of classical mechanics into the syllabus of an Engineering undergraduate course. This requires, as pre-requisites, the tools of differential and integral calculus of multivariate functions and vector analysis, which are both traditionally dealt with in the basic disciplines of Engineering undergraduate courses. This formalism is more systematic and demands less algebraic work than the newtonian formalism, as a tool for obtaining the equations of motion of a system of particles. Two examples are examined: the simple pendulum and the double pendulum.

**Keywords:** Classical mechanics. Variational formalism. Simple pendulum. Double pendulum.

## INTRODUÇÃO

Em 1687, Isaac Newton publicou seus estudos sobre as leis do movimento dos corpos, lançando os alicerces do que, a partir do século XX, passaria a ser chamado de “mecânica clássica ou mecânica newtoniana” [1]. Postulando três leis básicas, Newton procurou descrever toda a dinâmica do movimento dos corpos a partir delas. A primeira lei, conhecida como “lei da inércia”, conceitua o referencial inercial e a noção qualitativa de movimento inercial de um corpo. A segunda lei fornece uma definição quantitativa de força resultante sobre um corpo. Em notação moderna,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1)$$

em que  $\vec{p} = m\vec{v}$  é o *momentum linear* ou *quantidade de movimento* do corpo,  $m$  é a sua massa;  $\vec{v}$ , a sua velocidade e  $\vec{F}$ , a força resultante sobre o corpo. A terceira lei, conhecida como a “lei da ação e reação”, refere-se a *dois* corpos em interação, relacionando as forças estabelecidas entre eles. De acordo com essas leis, uma vez conhecidas as forças que atuam sobre um dado corpo, sua posição e sua velocidade em um dado instante de tempo, é possível (em prin-

<sup>a</sup> Professor, Doutor, Departamento de Matemática e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Estrada Resende-Riachuelo, s/n., Morada da Colina, CEP 27523-000, Resende, RJ. E-mail: monerat@uerj.br

<sup>b</sup> Discente de Graduação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Estrada Resende-Riachuelo, s/n., Morada da Colina, CEP 27523-000, Resende, RJ. E-mail: thaísa@fat.uerj.br

<sup>c</sup> Discente de Graduação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Estrada Resende-Riachuelo, s/n., Morada da Colina, CEP 27523-000, Resende, RJ. E-mail: diego\_fernandes@fat.uerj.br

<sup>d</sup> Professor, Doutor, Departamento de Matemática e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Estrada Resende-Riachuelo, s/n., Morada da Colina, CEP 27523-000, Resende, RJ. E-mail: evasquez@uerj.br

cípio) determinar o seu comportamento mecânico (ou seja, a posição e velocidade) em qualquer instante de tempo.

O primeiro contato dos estudantes dos cursos de graduação de engenharia com a mecânica *newtoniana* geralmente ocorre no primeiro ano dos cursos de graduação. Diversas dificuldades são encontradas, em particular, o uso intensivo de diagramas geométricos de forças e decomposição algébrica de suas componentes segundo um sistema de eixos coordenados escolhido. Esses diagramas são vitais para a obtenção das equações de movimento de um dado sistema. Além disso, a presença de forças de vínculos em diversos sistemas físicos [2,3] torna a formulação *newtoniana* extremamente trabalhosa, em virtude da utilização de graus de liberdade supérfluos. Essa dificuldade, intrínseca ao formalismo *newtoniano*, leva a que o estudo de alguns sistemas interessantes seja omitido num curso regular, mesmo em períodos mais avançados.

Talvez uma forma viável de contornar essas dificuldades seja a introdução do formalismo variacional de Lagrange [4, 5, 6] e de Hamilton [5, 6] para o estudo da mecânica clássica, ainda no contexto de um curso de graduação de engenharia. A introdução de tal formalismo poderia servir, inclusive, como preparação para o aprendizado de algumas técnicas da teoria de sistemas dinâmicos, de grande importância para o estudo de sistemas com comportamento caótico, conforme exemplificado por Monerat et al. [7].

## ABORDANDO O FORMALISMO VARIACIONAL DE LAGRANGE PARA A MECÂNICA

### O cálculo das variações e a dedução das equações de lagrange

O cálculo das variações é uma generalização do cálculo diferencial e integral proposto por Newton, utilizado para determinar o lugar geométrico (em geral uma curva ou superfície) sobre o qual uma dada função assume um valor estacionário (usualmente um máximo ou mínimo). A origem do ferramental matemático que compõe o cálculo das variações nasceu de uma matéria publicada no jornal *Acta Eruditorum* em junho de 1696, na qual Johann Bernoulli propôs o seguinte desafio aos matemáticos da época [8]: dados dois pontos P e Q em um plano vertical e em desnível (isto é, a reta que os une não está na “horizontal” nem na “vertical”), qual é a curva que os liga de tal modo que uma partícula, partindo do repouso do ponto mais alto P e deslizando sobre ela sem atrito, sob a ação da

gravidade, gasta o menor tempo para atingir o ponto mais baixo Q?

A solução à pergunta, conhecida atualmente como o “problema da braquistócrona”, constitui um dos problemas clássicos do cálculo variacional. Porém antes de respondê-la, deve-se examinar o conceito de “funcional”.

Considere-se a integral definida

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), x) dx \quad (2)$$

O integrando é uma função  $f$  de  $x$  e de uma outra função  $y = y(x)$ . A integral  $I$  depende não só dos valores escolhidos para os limites de integração  $x_1$  e  $x_2$ , mas, também, da forma específica da função  $y(x)$ . Como se está integrando em  $x$ , após a integração, desaparece toda dependência em  $x$ . Logo, a grandeza  $I$  é, por assim dizer, uma função da função  $y(x)$ , ou, mais corretamente, um *funcional* de  $y$ , situação comumente denotada por  $I = I[y]$ .

Considerem-se dois pontos arbitrários e fixos A e B do plano  $xy$ , de coordenadas  $(x_A, y_A)$  e  $(x_B, y_B)$ , respectivamente. Seja D o conjunto de todas as possíveis funções  $y(x)$  tal  $(x_A, y_A) = (x_P, y(x_P))$  e  $(x_B, y_B) = (x_Q, y(x_Q))$ . Cada elemento de D, ou seja, cada possível função  $y(x)$ , corresponde a uma curva no plano  $xy$  conectando os pontos A e B. Como determinar a curva C/a função  $y = y(x)$  tal que o valor de I sobre esta curva seja um extremo (máximo ou mínimo)?

Nos cursos de cálculo diferencial e integral o aluno aprende que se pode determinar o valor de  $x$  para o qual uma função de uma variável  $y(x)$  (contínua e diferenciável) é um extremo, determinando-se para qual valor de  $x$  a variação sofrida pela função se anule

$$dy = y(x + dx) - y(x) = 0 \quad (3)$$

em que  $dx$  é uma variação infinitesimal sobre  $x$ . Se  $y(x)$  for contínua e diferenciável,  $dy$  também será uma quantidade infinitesimal. Efetuando uma expansão em série de Taylor em torno do ponto  $x$  e desprezando os termos de ordem superior na expansão, encontra-se:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx. \quad (4)$$

Esse resultado mostra que, como  $dx$  é diferente de zero,  $dy = 0$  só é possível para  $\frac{dy}{dx} = 0$ . (veja-se Barcellos-Neto [5]).

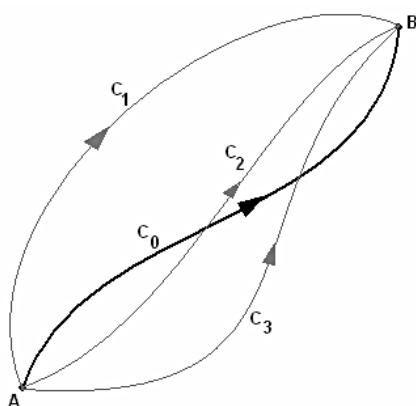


Figura 1 - Ilustração do conceito de minimização de um funcional. A cada curva suave (i.e., contínua e derivável)  $C_i$  conectando os pontos A e B corresponde um valor para o funcional  $I$ . O cálculo variacional procura determinar a curva (aqui representada por  $C_0$ ) que minimiza ou maximiza o valor de  $I$ .

Como proceder, então, no contexto de minimização/maximização de funcionais? O valor do funcional  $I$  depende da curva escolhida, ou seja, depende da forma da função  $y(x)$ . Seja  $y(x)$  uma tal função. Considera-se em seguida uma curva infinitesimalmente próxima a esta,  $y + \delta y$  (mas ainda com extremidades em A e B), o que acarreta uma variação infinitesimal  $\delta I$  no funcional. O valor de  $I$  será um extremo sob a curva  $y(x)$  se  $\delta I = 0$ .

O leitor deve estar atento ao fato de que as variações  $dy$  e  $\delta y$  são conceitualmente bem distintas. O  $dy$  refere-se à variação no valor de  $y(x)$  perante variações na variável  $x$ , mantida a forma funcional de  $y(x)$ . Já a variação funcional  $\delta y$  corresponde à mudança na forma da função, para um  $x$  fixo. Por exemplo, são coisas bem diferentes a variação  $dy$  sofrida por  $y(x) = x + 2$  quando  $x$  vai em  $x + dx$ , e a variação  $\delta y$  sofrida por  $y(x)$ , com  $x$  fixo, quando a forma de  $y(x)$  muda, por exemplo, de  $y(x) = x + 2$  para  $y(x) = 1.1x + 2$ .

O problema que se coloca é o da determinação da função  $y(x)$  que extremiza o funcional  $I$ . A variação  $\delta I$  do funcional  $I$  é

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \delta y, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(y, x) dx. \quad (5)$$

Expandindo o integrando da primeira integral acima em torno de  $\delta y = 0$  e desprezando os termos de ordem superior, obtém-se

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx. \quad (6)$$

A condição de extremo  $\delta I = 0$  para para quaisquer variações funcionais  $\delta y(x)$ , de acordo com a expressão anterior, implica a condição  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

Considere-se agora um funcional com a seguinte dependência

$$I = I[y, \dot{y}] \quad (7)$$

em que o ponto denota derivação ordinária de  $y$  em relação ao parâmetro  $x$ . Efetuando-se o procedimento análogo ao caso anterior, obtém-se

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dx. \quad (8)$$

Efetuando-se uma integração por partes no segundo termo do integrando, tendo em mente que as operações  $\delta$  e  $\frac{d}{dx}$  (variação funcional e variação ordinária) são independentes e que nos extremos  $x_1$  e  $x_2$   $\delta y(x_1) = 0$  e  $\delta y(x_2) = 0$ , obtém-se

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right) \delta y dx. \quad (9)$$

A condição de extremo  $\delta I = 0$  (que, no caso, é um mínimo) fornece

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (10)$$

Esta equação foi deduzida pela primeira vez por Euler em 1744 e é conhecida hoje como a “equação de Euler-Lagrange”. Fica como exercício ao leitor demonstrar que, no caso de funcionais com dependência nas derivadas de ordem superior de  $y$ ,  $I = I[y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}]$ , a equação de Euler-Lagrange assume a forma

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = 0 \quad (11)$$

em que  $n$  é a ordem da maior derivada de  $y$  que consta na dependência funcional de  $I$ .

Para responder à pergunta feita por J. Bernoulli, podem-se seguir os passos apontados em Barcelos-Neto [5]. Considere-se o ponto  $P$  na origem do sistema de coordenadas, por simplicidade. Para um ponto qualquer da trajetória, pode-se escrever

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{v} \quad (12)$$

O tempo para a partícula deslocar-se do ponto  $P$  ao ponto  $Q$  é dado pela integral

$$\Delta t = \int_P^Q \frac{ds}{v}. \quad (13)$$

No caso de uma partícula partindo do repouso a partir da origem do sistema de coordenadas, encontra-se, com base na conhecida fórmula de Torricelli, a expressão para a velocidade  $v$  após ela ter percorrido uma distância  $y$  da forma  $v = \sqrt{2gy}$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade local. Escrevendo-se o elemento de linha  $ds$  na forma

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (14)$$

a expressão para o tempo  $\Delta t$  é

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_P^Q \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx, \quad (15)$$

em que  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ . Para que  $\Delta t$  seja um extremo (no

caso, um mínimo), o integrando deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange (10). Obtém-se a equação diferencial

$$2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1 = 0. \quad (16)$$

A resolução desta equação é apresentada de forma detalhada em [5]. Seu resultado é expresso na forma

$$x = c^2 \arcsen \frac{\sqrt{y}}{c} - \sqrt{y(c^2 - y)} \quad (17)$$

em que  $c$  é uma constante de integração. A equação (17) corresponde à equação de uma *ciclóide*.

Uma outra demonstração para a solução do problema da braquistócrona usando o princípio de Fermat é apresentada na referência [9]. Também sobre este problema sugerem-se as referências [10] e [11]. Outro problema clássico do cálculo variacional, também discutido na referência [5], é a determinação de qual curva, passando por dois pontos dados A e B num plano, possui o menor comprimento. Considere-se o elemento de linha  $ds$ ,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad 18$$

Integrando-se esta expressão, obtém-se o comprimento da curva que passa por A e B:

$$S_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx. \quad (19)$$

Levando o integrando  $F = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$  às equações de Euler-Lagrange (10) encontra-se a condição de extremo (mínimo)

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C_1, \quad (20)$$

em que  $C_1$  é uma constante arbitrária. A solução da equação diferencial acima é da forma

$$y = \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - C_1^2}} + C_2, \quad (21)$$

em que  $C_2$  é uma outra constante arbitrária.

Ao leitor interessado sugerem-se as referências [5], [11] e [12], onde estes e outros exemplos envolvendo cálculo variacional são apresentados. Problemas como estes de otimização aparecem em várias áreas da engenharia: química [14], elétrica [15,16], de produção [17], de estruturas [18], e outras áreas, como economia [19].

## O PRINCÍPIO DE MÍNIMA AÇÃO

Em 1788, Joseph-Louis Lagrange desenvolveu uma formulação da mecânica a que denominou “mecânica analítica” [4], de caráter muito mais geral do que a formulação newtoniana, no que tange às definições de momento linear e força, e baseada em ferramental matemático bem mais poderoso. No formalismo lagrangiano postula-se a existência de uma função escalar  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ , denominada “função de Lagrange” ou “lagrangiana” do sistema, escrita em termos das coordenadas e das velocidades do sistema de partículas, em que  $\vec{r}$  é uma notação compacta para  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\}$  o conjunto de vetores posição das  $N$  partículas que compõem o sistema, e  $\dot{\vec{r}}$  corresponde ao conjunto das respectivas velocidades  $\{\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N\}$ .

As equações de movimento de um sistema mecânico são obtidas a partir desta lagrangiana, do modo descrito a seguir. Seja  $\vec{r}_A$  a configuração inicial do sistema em um instante de tempo  $t_A$ , e  $\vec{r}_B$  a configuração em um instante de tempo posterior  $t_B$ , a evolução no tempo deste sistema – que, em última análise, consiste no conjunto de trajetórias  $\vec{r}(t)$  de cada partícula que o compõem – será referida aqui como “trajetória do sistema”.

Considere-se uma trajetória *hipotética* do sistema, descrita por qualquer função suave (i.e., contínua e derivável)  $\vec{r}(t)$  tal que  $\vec{r}(t_A) = \vec{r}_A$  e  $\vec{r}(t_B) = \vec{r}_B$ . Define-se a *ação* do sistema como sendo a grandeza

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) dt. \quad (22)$$

Fixados  $(\vec{r}_A, t_A)$  e  $(\vec{r}_B, t_B)$ , o valor desta integral depende, fundamentalmente, da trajetória hipotética  $\vec{r}(t)$  do sistema. A ação  $S$  é, portanto, um *funcional* da trajetória  $\vec{r}(t)$ . Segundo Lagrange, a

trajetória *real*  $\vec{r}(t)$  percorrida pelo sistema é aquela para o qual o valor de  $S$  é mínimo; este é o princípio da mínima ação, que reflete o princípio proposto por Maupertuis, segundo o qual “a Natureza, na produção de seus efeitos, sempre age da maneira mais simples”. O princípio de mínima ação, por ser um princípio, um postulado, não é demonstrado; o mesmo ocorre para as leis de Newton, que são tomadas como postulados.

A equação de Euler-Lagrange obtida pela variação da ação corresponde à equação (10) para  $f = L$ . Mas não se trata de uma equação diferencial em que  $L$  a função incógnita: dada a lagrangiana  $L$ , o que se obtém é uma equação diferencial para a trajetória  $\vec{r}(t)$  do sistema, ou seja, as equações de movimento do sistema.

### Forma da lagrangiana de um sistema mecânico

Como escrever a função de Lagrange de um sistema, então? Considera-se, inicialmente, o caso de uma partícula livre em movimento no espaço absoluto vazio, descrito em relação a um referencial inercial qualquer, em relação ao qual são feitas todas as medidas de distâncias e intervalos de tempo. Para realizar estas medidas, é necessário escolher um sistema de coordenadas espaciais (uma origem e um sistema de eixos coordenados) e, também, um instante “zero” de tempo (a origem da contagem dos tempos).

Os fenômenos previstos pelas leis físicas não podem depender da escolha da origem dos eixos coordenados (propriedade denominada homogeneidade do espaço) nem da orientação escolhida para os eixos (isotropia do espaço) nem da escolha do instante zero (homogeneidade do tempo). Do que poderia depender a lagrangiana da partícula livre, tendo em vista essas propriedades? Em virtude da homogeneidade do espaço e do tempo, a lagrangiana da partícula livre não poderia depender da posição da partícula, nem da distância desta à origem, nem do instante de tempo considerado. Em razão da isotropia do espaço, não deveria também depender da direção de seu movimento, ou seja, do vetor velocidade, mas nada impede que dependa do módulo da velocidade.

Uma primeira idéia, então, seria uma lagrangiana linear na velocidade, da forma  $L = c|\dot{\vec{r}}|$ , em que  $c$  é uma constante não-nula arbitrária. No entanto, esta lagrangiana não nos leva muito longe, pois a equação de Euler-Lagrange resulta na identidade  $0 = 0$ . Uma segunda forma mais simples seria

$$L = c|\dot{\vec{r}}|^2 = c\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (23)$$

que fornece a equação de movimento

$$L = c|\dot{\vec{r}}|^2 = c\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (24)$$

que é o resultado esperado: uma partícula livre possui aceleração nula.

Como interpretar fisicamente a constante  $c$ ? Considere-se uma partícula sob a influência de uma força resultante não nula  $F(t)$ , com dependência temporal conhecida. A presença desta força quebra as características de isotropia e homogeneidade mencionadas no caso anterior; portanto, a lagrangiana não terá a mesma forma. Sabe-se, no entanto, que se deve recair, neste caso, no limite  $F(t) \rightarrow 0$  e que a equação de movimento deve ter a forma:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t) \quad (25)$$

Pode-se constatar que isto é facilmente obtido com a lagrangiana:

$$L_1 = c|\dot{\vec{r}}|^2 + \vec{r} \cdot \vec{F}(t) \quad (26)$$

De fato, ao aplicar-se a equação de Euler-Lagrange, obtém-se:

$$\vec{F}(t) - 2c\ddot{\vec{r}} = 0 \quad (27)$$

que nos permite identificar  $c = m/2$ , ou seja, para uma partícula sobre uma força resultante  $F(t)$ , a lagrangiana é da forma

$$L_1 = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 + \vec{r} \cdot \vec{F}(t) \quad (28)$$

Para a partícula livre,

$$L_o = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 \quad (29)$$

ou seja, a lagrangiana resume-se à energia cinética da partícula, neste caso.

No caso de uma força conservativa, ou seja, uma força obtida a partir de um potencial  $V(r)$  tal que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \quad (30)$$

a equação de movimento

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \quad (31)$$

pode ser obtida a partir da lagrangiana:

$$L = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - V(\vec{r}) \quad (32)$$

Conclui-se, então, que sistemas mecânicos conservativos podem ser descritos por lagrangianas da forma:

$$L = T(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}) \quad (33)$$

em que  $T(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$  é a energia cinética e  $V(\vec{r})$ , a energia potencial do sistema. Sabendo-se expressar corretamente estas energias, constrói-se a lagrangiana e dela se obtêm as equações de movimento do sistema, diretamente das equações de Euler-Lagrange.

## ESTUDO DE CASOS

### O pêndulo simples

Seja um pêndulo simples restrito a um plano, submetido à aceleração da gravidade local  $\vec{g}$ , conforme representado na Fig. 2.

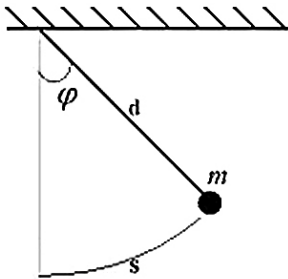


Figura 2 - Pêndulo simples no plano

### Equação de movimento do pêndulo simples via formalismo newtoniano

O primeiro passo é identificar as forças que atuam sobre a partícula de massa  $m$ ; neste caso, a força-peso  $\vec{P} = m\vec{g}$  e a tração  $\vec{T}$  no fio. Em seguida, escolher um sistema de eixos coordenados, segundo os quais é expressa em componentes a segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a},$$

obtendo-se equações em termos das coordenadas escolhidas para representar o sistema e das suas derivadas (no caso em questão, na variável  $\varphi$  e suas derivadas temporais). Aqui, somente a componente transversal da aceleração da partícula é relevante, sendo proporcional à componente transversal da força resultante,

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin\varphi = md\ddot{\varphi},$$

de onde se obtêm diretamente a equação de movimento

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{d} \sin\varphi = 0.$$

Este é um procedimento relativamente singelo, dada a simplicidade do sistema.

### Equação de movimento do pêndulo simples via formalismo lagrangiano

O vetor posição da partícula é da forma:

$$\vec{r} = (d \sin\varphi)\vec{i} + (d \cos\varphi)\vec{j}$$

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Com um pouco de álgebra vetorial, obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\varphi}^2$$

A energia potencial do sistema é:

$$V = -mg d \cos\varphi$$

tomando-se como referência o plano perpendicular a  $\vec{g}$  contendo o ponto fixo do pêndulo (sobre este plano,  $V = 0$ ). A lagrangiana para este sistema é, portanto,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m d \dot{\varphi}^2 + m g d \cos\varphi$$

Ao utilizar-se a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

obtém-se a equação de movimento do sistema,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{d} \sin\varphi = 0$$

### O pêndulo duplo

#### Equações de movimento do pêndulo duplo via formalismo newtoniano

A configuração do pêndulo duplo pode ser descrita em termos dos ângulos  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , como indicado na Fig. 3.

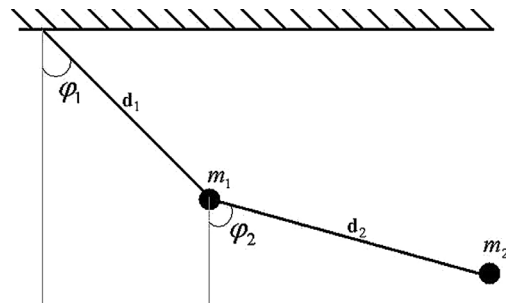


Figura 3 - Pêndulo duplo no plano

Os ângulos  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e as coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  das partículas estão relacionados pela transformação:

$$\begin{aligned}x_1 &= d_1 \cos \varphi_1 \\y_1 &= d_1 \sin \varphi_1 \\x_2 &= d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2 \\y_2 &= d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2\end{aligned}$$

em que se escolhe a origem dos eixos sobre o ponto fixo do pêndulo, orientando-se o eixo x na vertical e para baixo e o eixo y na horizontal e para a direita. Ao aplicar-se a segunda lei de Newton às partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$ , obtêm-se as seguintes equações, em termos das componentes cartesianas das acelerações sobre cada partícula:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2 \\m_1 \ddot{y}_1 &= -T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 \\m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - T_2 \cos \varphi_2 \\m_2 \ddot{y}_2 &= -T_2 \sin \varphi_2\end{aligned}$$

Escrevendo estas componentes em termos das coordenadas angulares ( $\varphi_1, \varphi_2$ ) e suas derivadas, obtêm-se o sistema:

$$\begin{aligned}-m_1 d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1) &= m_1 g - T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2 \\-m_1 d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1) &= -T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 \\-m_2 [d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1) + d_2 (\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 + \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)] &= m_2 g - T_2 \cos \varphi_2 \\-m_2 [d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1) + d_2 (\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)] &= -T_2 \sin \varphi_2\end{aligned}$$

que, após trabalhosas manipulações algébricas, pode ser reescrito de forma a explicitar as derivadas segundas das coordenadas angulares,

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 G_1 + m_2 G_2}{l_1 G_5} \quad e \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 G_3 + m_2 G_4}{l_2 G_5}$$

em que:

$$\begin{aligned}G_1 &= -2g \sin \varphi_1 \\G_2 &= d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + 2d_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) - g \sin \varphi_1 \\G_3 &= -2d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - g \sin \theta_2 \\G_4 &= -2d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - g \sin \theta_2 + d_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \\G_5 &= 2m_1 + m_2(1 - \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2))\end{aligned}$$

### Equações de movimento do pêndulo duplo via formalismo lagrangiano

Pode-se subdividir o pêndulo duplo em dois: o primeiro deles com comprimento  $d_1$ , da extremidade fixa à massa  $m_1$ ; o segundo com comprimento  $d_2$ , com uma extremidade em  $m_1$  e a outra em  $m_2$ , como ilustrado na Fig. 3. O vetor posição da primeira partícula é da forma:

$$\vec{r}_1 = d_1 \sin \varphi_1 \hat{i} + d_1 \cos \varphi_1 \hat{j}$$

Sua energia cinética é dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

e sua energia potencial é da forma:

$$V_1 = -m_1 g d_1 \cos \varphi_1$$

O vetor posição da segunda partícula é:

$$\vec{r}_2 = (d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2) \hat{i} + (d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2) \hat{j}$$

Sua energia cinética pode ser escrita como

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \left[ \dot{\varphi}_1^2 d_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 d_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 d_1 d_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

e sua energia potencial, como

$$V_2 = -m_2 g (d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2)$$

A lagrangiana total do sistema é a soma das lagrangianas referentes ao primeiro e ao segundo pêndulo,

$$\begin{aligned}L &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\varphi}_1^2 d_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 d_2^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 d_1 d_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\&+ (m_1 + m_2) g d_1 \cos \varphi_1 + m_2 g d_2 \cos \varphi_2\end{aligned}$$

e as equações de movimento:

$$\begin{aligned}Q_1 \ddot{\varphi}_1 + Q_2 \ddot{\varphi}_2 &= Q_3 \\Q_4 \ddot{\varphi}_1 + Q_5 \ddot{\varphi}_2 &= Q_6\end{aligned}$$

podem ser diretamente obtidas da forma geral das equações de Euler-Lagrange. Os  $Q$ 's são funções das coordenadas e suas derivadas primeiras. Após manipulação algébrica relativamente simples, as equações podem ser reescritas explicitando-se  $\ddot{\varphi}_1$  e  $\ddot{\varphi}_2$  em relação às coordenadas e suas derivadas primeiras, resultando em equações idênticas àquelas obtidas via formalismo newtoniano.

## O FORMALISMO DE HAMILTON

Assim como o formalismo lagrangiano, para a mecânica, permite descrever a mecânica clássica em termos de uma função denominada lagrangiana do sistema, no formalismo hamiltoniano os sistemas mecânicos devem ser descritos por uma função denominada "função de Hamilton" ou "hamiltoniana" do sistema, a qual pode ser obtida uma vez conhecida a lagrangiana do sistema. Estas duas funções estão relacionadas por:

$$H(q, p, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}(q, p), t)$$

em que:  $q_i$  são as *coordenadas generalizadas* do sistema (quaisquer conjunto de grandezas que especifiquem completamente a posição ou configuração de um sistema num dado instante, por exemplo, as cartesianas  $q = \{x, y, z\}$ , ou as esféricas  $\{r, \theta, \phi\}$ );

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  são os momentos conjugados às coordenadas  $q_i$ ; e  $L$  é a lagrangiana do sistema, com as

velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  expressas em termos de  $q_i$ 's e  $p_i$ 's. Dessa forma, a hamiltoniana é uma função das coordenadas, dos momentos e do tempo.

Um aspecto interessante acerca desse formalismo é que coordenadas e momentos são tratados em pé de igualdade, como quantidades independentes. A dinâmica do sistema é governada pelas equações de Hamilton [5,6]:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (35)$$

A dedução dessas equações pode ser vista detalhadamente nas referências [2, 5, 20]. Para um sistema de  $N$  graus de liberdade (ou seja, para o qual  $N$  coordenadas são necessárias para definir univocamente a sua configuração) existem  $2N$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, em contraste com o formalismo de Lagrange, no qual as equações diferenciais de movimento são de segunda ordem. Pode-se mostrar que, para sistemas em que a energia mecânica total  $T + V$  se conserva, a hamiltoniana depende somente das coordenadas e dos momentos.

No caso do sistema composto pelo pêndulo simples, discutido anteriormente, a hamiltoniana é da forma

$$H = \frac{q^2}{2md^2} - mgd \cos \varphi$$

o que pode ser facilmente verificado a partir da função de Lagrange para o pêndulo simples e da expressão (34). A energia mecânica total é conservada, visto que  $H$  não depende explicitamente do tempo. As equações de Hamilton descritas pelas expressões (35) fornecem um conjunto de duas equações ordinárias de primeira ordem, que, quando combinadas, reproduzem o resultado fornecido pelas equações de Lagrange. A hamiltoniana para o sistema formado pelo pêndulo duplo é conhecida na literatura (veja-se, por exemplo, Monerat et al. [7]).

Para o leitor interessado sugere-se como exercício a construção da função de Hamilton para um sistema massa-mola sem atrito, também conhecido como “oscilador harmônico” [6]. Assim como no caso do pêndulo simples, o leitor poderá observar que a hamiltoniana para este sistema não depende do tempo; logo, o sistema também é conservativo. Por outro lado, no caso em que o atrito seja considerado, a hamiltoniana dependerá explicitamente do tempo e a energia mecânica total não será conservada [20].

## CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS FINAIS

É cada vez mais freqüente a aplicação do formalismo variacional em diversas áreas da engenharia [21-25], inclusive para o estudo do controle de sistemas mecânicos [26,27]. Sugere-se, neste trabalho, a introdução do formalismo lagrangiano e hamiltoniano no módulo básico de um curso de engenharia, tendo como pré-requisitos noções básicas de mecânica newtoniana, de cálculo diferencial e integral e de análise vetorial. Uma vantagem de tais formalismos

sobre o newtoniano é a obtenção das equações de movimento de um sistema de modo mais sistemático e com trabalho algébrico bem menor.

## REFERÊNCIAS

- [1] I. Newton, *Mathematical principles of Natural Philosophy*. Berkeley: University of California Press, 1934.
- [2] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [3] K. R. Symon, *Mecânica*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.
- [4] J. L. Lagrange. *Méchanique Analytique*. 1788.
- [5] J. Barcellos Neto, *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Third Edition, Ed. Butterworth Heinemann, 2000.
- [7] G. A. Monerat, E. V. Corrêa Silva, G. Oliveira-Neto, A. R. P. de Assumpção, A. R. R. Papa, *Rev. Bras. Ens. Fís.*, vol. 28, n. 2, p. 177-189, (2006).
- [8] F. B. P. Vieira, L. B. Rodrigues, E. Augustini, *FAMAT em Revista*, No.3, p. 137 –148, (2004).
- [9] Herman Erlichson, *European J. Phys.* 20, no.5,.. p.....299–304,..(1999).
- [10] Gary Lawlor, *Amer. Math. Monthly* 103, no. 3, 242–249. (1996).
- [11] Stephen C. Lipp, *SIAM J. Control Optim.* 35, no. 2, p. 562–584, (1997).
- [12] Bruce van Brunt. *The Calculus of Variations*, Springer-Verlag New York, 2004.
- [13] F. W. Byron Jr. & R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- [14] Carlos Augusto G. Perlingeiro, *Engenharia de Processos*, Ed. Edgard Blücher, 2005.
- [15] L. V. Ferreira, *Utilização de Sistemas Gradientes para Resolução de Problemas de Otimização em Computadores Paralelos*, Tese de Doutorado, COPPE/ UFRJ, 2006.
- [16] G. A. Monerat, R. P. Pereira, I. C. dos Santos, in *Anais da I Semana de Atividades Científicas da ADB*, Resende RJ, 2003, editado por G. A. Monerat & M. C. B. Reis, (Ed. AEDB, Resende RJ, 2003) ISSN 1806-7964, p. 73-76.
- [17] Luiz Antonio Nogueira Lorena; Edson Luiz França Senne; João Argemiro de Carvalho Paiva; Marcos Antonio Pereira, *Gest. Prod.* vol. 8 no.2 São Carlos, (2001).
- [18] V. C. de Castilho, *Otimização de Componentes de Concreto Pré-Moldado Protendidos Mediante Algoritmos Genéticos*, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 2003.



- [19] J.M.Stern, C.A.B.Pereira, C.O.Ribeiro, C.Dunder, F.Nakano, M.S.Lauretto., in 51º Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 395 páginas, (Doc 5.4.5), (2000).
- [20] Lemos, N. A., American Journal of Physics, 47, p. 857. (1979).
- [21] Bullo, F. Leonard, N.E. Lewis, A.D. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(8), pp. 1437-1454, (2000).
- [22] Astolfi, A. Menini, L. IEEE Transactions on Automatic Control 45(8), pp. 1470-1482, (2000).
- [23] P. C. Andia; F. Costanzo; G. L. Gray. International Journal of Solids and Structures, 42, pp. 6409-6432, (2005).
- [24] A. van der Schaft. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag, 2000.
- [25] MONERAT, Germano Amaral; OLIVEIRA, Thaisa Marques Gomes de; FERNANDES SILVA, Diego Coutinho, CORRÊA SILVA, Eduardo Vasquez, in *Resumos do XI Encontro de Ensino de Engenharia, Penedo, RJ, 2005*.
- [26] Andrew D. Lewis. *Math 439 Course Notes Lagrangian Mechanics, Dynamics, and Control*. January-April 2003.
- [27] R. M. Ghigliazza, R. Altendorfer, P. Holmes, D. Koditschek, SIAM Review, vol. 47, No. 3, pp. 519-549, (2005).

## AGRADECIMENTOS

G. A. Monerat agradece à Faperj (Proc. nº E-26/170.762/2004). E. V. Corrêa Silva (bolsista de Produtividade do CNPq, Brasil) e G. A. Monerat agradecem ao CNPq (Edital Universal CNPq/2006 – Proc. nº 476852/2006-4). T. M. G. de Oliveira e D. C. Fernandes Silva agradecem, respectivamente, ao CNPq e à Uerj pelas bolsas de iniciação científica concedidas (programa Pibic).

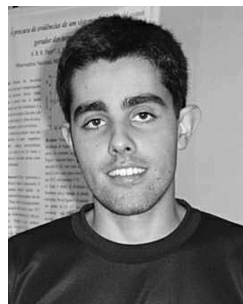
## DADOS DOS AUTORES



**Germano Amaral Monerat**  
Bacharel em Física pela Uerj (1995), mestre em Física Teórica pela Uerj (1999), Doutor em Física Teórica pela Uerj (2003). Subchefe do departamento de Matemática e Computação da Faculdade de Tecnologia Uerj.



**Thaisa Marques Gomes de Oliveira**  
Discente de graduação do curso de Engenharia de Produção da Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



**Diego Coutinho Fernandes Silva**  
Discente de graduação do curso de Engenharia de Produção da Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



**Eduardo Vasquez Corrêa Silva**  
Bacharel em Física pela Uerj (1991), mestre em Física Teórica pela UFRJ (1994), Doutor em Física Teórica pelo CBPF (2003). Chefe do departamento de Matemática e Computação da Faculdade de Tecnologia da Uerj.

